CURSO INTRODUCTORIO DE MATEMÁTICA 2019

Ingeniería en Alimentos
Ingeniería en Biotecnología

Profesora: Ing. Marcela Filippi

Mediante el estudio de la Matemática se busca desarrollar una forma de pensamiento que nos permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales, en este caso desde el punto de vista de la aplicación de los distintos puntos de vista de la ingeniería.

En la aplicación de la matemática de deben utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; al mismo tiempo, se busca adquirir una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina, de colaboración y crítica, en el ámbito en el que nos desarrollamos.

El presente curso pretende que el estudiante ingresante a las carreras de ingeniería en alimentos y biotecnología de la Universidad Nacional de Río Negro pueda desarrollar habilidades en el manejo de las herramientas matemáticas básicas para poder transitar su carrera de manera armoniosa y segura.

INDICE

CONTENIDOS DE CONSULTA

UNIDAD 1: NÚMEROS

CONTENIDOS DEL CURSO

UNIDAD 2: ECUACIONES

UNIDAD 3: POLINOMIOS

UNIDAD 4: BIBLIOGRAFÍA

1. Números

Se puede decir que la noción de número nació con el hombre. El hombre primitivo tenía la idea de número natural y a partir de allí, a lo largo de muchos siglos e intenso trabajo, se ha llegado al desarrollo que actualmente posee el concepto de número. Con los números expresamos cantidades y también medidas pudiendo además operar con ellos.

1.1 NÚMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales **N** está constituido por los números 1,2,3,4,5,..., 100,...,.*n*...., con los cuales contamos, ordenamos y realizamos las operaciones de suma y multiplicación, siendo el resultado de estas operaciones también un número natural, sin embargo no ocurre lo mismo con la resta y con la división.

<u>Característica del conjunto de números naturales</u>

- *Es un conjunto infinito.*
- *Tiene primer elemento, no tiene último elemento.*
- *Todo número natural tiene un sucesor, es decir, cada número natural, tiene un consecutivo.*
- *Todo número natural, salvo el uno, tiene antecesor.*
- *Entre dos números naturales consecutivos, no existe otro número natural, por eso se dice que el conjunto es* ***discreto.***

Por ser un conjunto ordenado, es posible representar a los números naturales en una recta, eligiendo como origen el cero, que puede ser incluido también en el conjunto, usando en ese caso el símbolo $\mathbf{N}_0$ para denotarlo.

1.1.1 Múltiplos y divisores

Se sabe que la multiplicación es una suma de términos iguales y puede escribirse de manera comprimida o abreviada:

$$\underbrace{a + a + a + \cdots \ldots\ldots + a}_{n\ veces} = na$$

Ejemplo: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 8 × 3 = 24

En este caso decimos que **24 es múltiplo de 3** y que **24 es múltiplo de 8**, o lo que es lo mismo: **3 es divisor de 24** y **8 es divisor de 24.**

Definición: *a* es **múltiplo** de *b* si es posible encontrar un número natural *k,* tal que se cumple:

$$a = k \cdot b$$

Si *a* es múltiplo de *b*, la división *a* ÷ *b* tiene resto cero, por lo tanto decimos indistintamente:

- *a* es **múltiplo** de *b*
- *b* **divide a** *a*
- *b* es **factor de** *a*
- *a* es **divisible por** *b*

Son resultados inmediatos de la definición:

- 1 es divisor de todos los números pues: $\boldsymbol{a = 1 \cdot a}$
- 0 es múltiplo de todos los números pues $\boldsymbol{0 = 0 \cdot a}$

En nuestro ejemplo son equivalentes las proposiciones:

• 24 es múltiplo de 3
• 3 divide a 24
• 3 es factor de 24
• 24 es divisible por 3

EJERCICIOS PROPUESTOS

<u>Ejercicio 1.</u> ¿252 y 588 son múltiplos de 7? ¿La suma de ellos es múltiplo de 7? ¿Y su diferencia?

<u>Ejercicio 2.</u> Para pensar....

a) Dado un número natural cualquiera, ¿cuál es su divisor más pequeño? ¿y el mayor?

b) Si un número es divisor de otro, ¿también lo es de los múltiplos de éste? ¿Por qué?

c) Dado un número natural cualquiera, ¿cuál es su múltiplo menor? ¿y el mayor?

d) La suma de varios múltiplos de un número ¿también es múltiplo de dicho número? Si es verdad, demuéstralo; de lo contrario da un contraejemplo.

<u>Ejercicio 3.</u>

a) Enunciar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6,8, 9,11

b) Escribir Verdadero (V) o Falso (F) según corresponda:

♦ Si un número es divisible por 6, entonces, es divisible por 3.

♦ Si un número es divisible por 3, entonces, es divisible por 6.

♦ Si un número es divisible por 3 y por 5, entonces, es divisible por 15.

♦ Si un número es divisible por 7, entonces, no es divisible por 2.

♦ Si un número no es divisible por 4, entonces, no es divisible por 2.

♦ Si un número es divisible por 16, entonces, es divisible por 8 y por 4.

c) El número de cajas que hay en una cámara frigorífica es menor que 1000. Si las agrupamos de a 5, de a 6, de a 9 o de a 11, siempre sobra 1. ¿Cuántas cajas hay en la cámara?

1.1.2 Números primos y compuestos

La cantidad de divisores que tiene un número permite clasificarlo en **número primo o número compuesto**, recordemos que todo número *n* mayor que 1 tiene como divisores al 1 y a él mismo. Si admite sólo estos divisores, se dice que el número es **primo.** Si los divisores son más de dos, el número es **compuesto** y en ese caso es posible factorizarlo como producto de los números primos que lo dividen. Esta descomposición es única, salvo el orden en que pueden usarse los números primos como factores

Ejemplo:

• **2 es un número primo**, pues tiene solamente dos divisores: él mismo y el 1.

Es bueno destacar que el número 2 es el único número primo par.

• **50 es un número compuesto,** pues admite los divisores 1, 2, 5, 10, 25, 50 y puede factorizarse usando números primos. Así: $50 = 52 \cdot 2$

• **1 no es número primo**.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para pensar:

a) La suma de dos números primos ¿es un número primo? ¿Siempre?

Justifica tu respuesta.

b) El producto de números primos ¿es un número primo? Justifica tu respuesta

1.1.3 Máximo común divisor

Buscamos los divisores de los números 24 y 36:

Los divisores de 24 son: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 8, **12**, 24. Los divisores de 36 son: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 9, **12**, 18,36. Observamos que los divisores comunes a ambos números son: **1, 2, 3, 4, 6,12.**

El mayor de ellos es **12**, al que llamamos: **máximo común divisor,** por ser el mayor de los divisores comunes y lo denotamos así:

$$mcd(24{,}36) = 12$$

Escribiendo los números 24 y 36 factorizados, podemos calcular en forma práctica el máximo común divisor, sin necesidad de listar los divisores de cada uno de los números.

Así, $24 = 2^3.3$ y $36 = 2^2 \cdot 3^2$ para encontrar el mcd (24,36) *debemos realizar el producto de los factores que son comunes a ambas descomposiciones tomándolos con el menor exponente con que figuran.*

Por lo tanto, elegimos 2^2 y 3, resultando entonces:

$$mcd(24{,}36) = 2^2 3 = 12$$

tal como lo habíamos obtenido al hacer el listado de los divisores de los números 24 y 36.

Nota: Si mcd (a,b) = 1, es decir, 1 es el único divisor común de a y b, diremos que a y b son coprimos o primos entre sí .

1.1.4 Mínimo común múltiplo

Tomemos ahora los números 12 y 9, busquemos sus primeros múltiplos. Los primeros múltiplos de 12 son: 12, 24, **36**, 48, 60**, 72**, 84, 96, **108,** 120, 132…Los primeros múltiplos de 9 son: 9,18, 27, **36,** 45, 54, 63, **72**, 81, 90, 99, **108,** 117….

Observamos que hay un número infinito de múltiplos de cada uno de ellos y hay infinitos múltiplos comunes a ambos: **36, 72, 108**…El menor de ellos, el **36**, es lo que llamamos el **mínimo común múltiplo** por ser el menor de los múltiplos comunes y lo indicamos así*:*

$$mcm(12{,}9) = 36$$

Escribiendo los números 12 y 9 en forma factorizada, podemos calcular en forma práctica el mínimo común múltiplo sin necesidad de listar los múltiplos de cada uno de los números.

Siendo $9 = 3^2$ y $12 = 3 \cdot 2^2$ para encontrar el **mcm (12,9)** debemos realizar el producto de los factores que son comunes a ambas descomposiciones como también los que no lo son tomándolos con el mayor exponente con que figuran. Por lo tanto elegimos 2^2 y 3^2, resultando entonces:

$$mcm(12{,}9) = 2^2 . 3^2 = 36$$

tal como habíamos obtenido al hacer el listado de los múltiplos de los números 12 y 9. Queda para el lector verificar que mcm (24,36) = 72

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: En la Autopista Serranías Puntanas, de 240 km de largo, han planificado colocar:

♦ cabinas telefónicas cada 12 km
♦ puestos sanitarios cada 30 km
♦ estaciones de servicio cada 15 km

a) Si en el kilómetro 0 existen los tres servicios, ¿en qué kilómetros vuelven a coincidir los tres?

b) Si la Autopista se extiende 60 km más, al final de este nuevo tramo, ¿volverán a coincidir?

c) ¿Qué característica tienes los números de los kilómetros que coinciden los tres servicios?

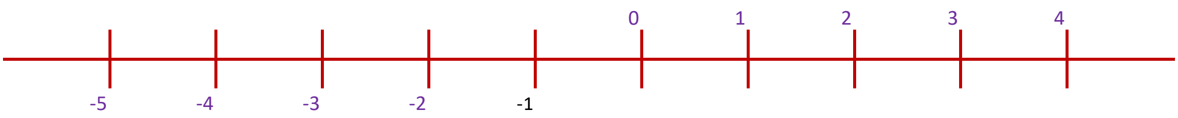
Ejercicio 2: El árbol de Navidad de mi casa tiene dos guirnaldas de luces, una se prende cada 6 segundos y la otra cada 9 segundos. ¿Cada cuántos segundos se prenderán las dos juntas?

1.2 NÚMEROS ENTEROS

Recordemos que la resta en el conjunto de los números naturales siempre es posible cuando el minuendo es mayor que el sustraendo, en caso contrario no es posible. Para resolver este problema necesitamos ampliar el campo numérico introduciendo el cero y los opuestos de los números naturales, llamados números enteros negativos.

Obtenemos el **conjunto de los números enteros: Z** = {......,− 3, − 2, − 1, 0 ,1, 2, 3, 4, 5,.....}

Pueden representarse en la recta numérica como sigue:



Definición: Si x es un número entero $-x$ es el opuesto de x.

Ejemplos:

a) Sea $x = -7$, su opuesto es $-x = 7$.

b) Sea $x = 4$, su opuesto es $-x = -4$.

Las operaciones de suma, resta y producto dan como resultado un número entero, sin embargo no ocurre lo mismo con la división, por ejemplo 8 dividido 3 no da un número entero.

Características del conjunto Z

- Es un conjunto infinito
- No tiene ni primer elemento ni último
- Es un conjunto discreto
- Cada número entero tiene un antecesor y un sucesor

1.2.1 Valor absoluto

Para cada número entero *x* definimos el **valor absoluto** de *x*, que indicamos $|x|$, como sigue:

Si el número *x* es positivo o cero, su valor absoluto es el mismo número y es su opuesto, –*x,* si el número es negativo. Simbólicamente:

Definición:

Definición: $$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

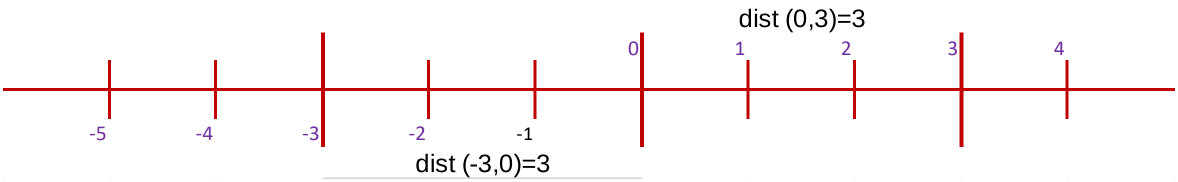
Recordemos:

El valor absoluto de cada número entero, es siempre un número no negativo

Ejemplos:

$|3| = 3$; $\qquad |-3| = -(-3) = 3$

Geométricamente, el valor absoluto mide la distancia del número *x* al cero, los ejemplos anteriores quedan representado en la recta por:



EJERCICIOS PROPUESTOS

__Ejercicio 1__: Encontrar el valor de cada una de las expresiones siguientes, para $x = 2$ y $y = -3$:

a) $|x+y|$ b) $|2(x+y)|$ c) $|x+3y|$ d) $|x-y|$
e) $|2(x-y)|$ f) $y-|x-3y|$

1.2.2 Comparación de números enteros

Dados dos enteros *a* y *b*, se dice que *a* < *b* si y sólo si *b* - *a* > 0.

Observación:

• Todo número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.

• Dados dos números enteros negativos, *a* y *b, b > a si y sólo si* | a | > | b |

EJERCICIOS PROPUESTOS

__Ejercicio 1__**.-** Escribir cada enunciado usando desigualdades

a) *x* es positivo **b)** *y* es negativo

c) *t* es menor que 6 **d)** *u* es menor o igual que 1

e) *z* es mayor que -5 **f)** *x* es menor que 5

g) *x* es mayor o igual que -3 **h)** *t* está comprendido entre –3 y 0

i) *z* es menor que –3 **j)** *t* es menor que 5 mayor que -2

k) *y* es menor que o igual que 2 e y mayor que 0

1.3 NÚMEROS RACIONALES

Con los números enteros podemos "contar" pero no siempre "medir". Para expresar medidas necesitamos números que representen "partes de la unidad", de aquí surge la idea de número fraccionario: la mitad, la tercera parte, las dos quintas partes, etc de una unidad.

El conjunto de los números enteros unido al conjunto de todas las fracciones constituye el conjunto de los **números racionales**, al que denotamos por **Q**.

Definición: Un número racional $\frac{a}{b}$ es el cociente de dos números enteros *a* y *b*, con *b* ≠ 0, siendo *a* el numerador y *b* el denominador.

Cuando en una fracción, el numerador y el denominador son números primos entre sí, decimos que la fracción es **irreducible**.

<u>Características de **Q**</u>

• **Q** es un conjunto denso, es decir que entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

• En **Q** no podemos hablar de sucesores o antecesores.

<u>**Ejemplos:**</u>

Dados dos números racionales *a* y *b*, siempre es posible encontrar otro entre ellos. Una manera sencilla de determinarlo es la semisuma: $\frac{a+b}{2}$

Queda para el lector la verificación: $a < \frac{a+b}{2} < b$

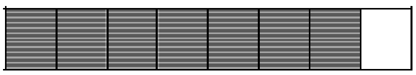
En este conjunto, las cuatro operaciones elementales son cerradas, es decir, el resultado obtenido es siempre un número racional.

1.3.1 Interpretación de números racionales

El número racional $\frac{a}{b}$ *a* indica que dividimos en *b* partes iguales al todo y tomamos *a* de esas partes. Así, dado el número $\frac{7}{8}$, éste nos indica que el todo se ha dividido en 8 partes iguales y de ellas se han tomado 7. Una de las formas gráficas de interpretar la situación anterior, es:

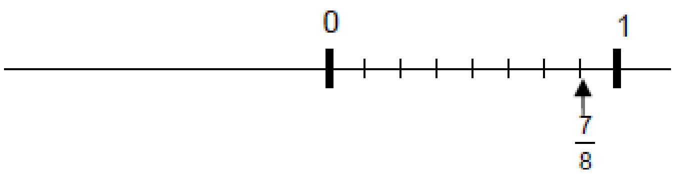
Ejemplos:

Si representamos el todo mediante una barra, ésta se ha dividido en 8 partes iguales



de las 8 partes iguales se toman 7, la parte sombreada representa el número $\frac{7}{8}$

En la recta numérica, como siete octavos es menor que uno, dividimos la unidad en ocho partes iguales, contamos siete de ellas a partir del cero, obteniendo así el punto de la recta que representa al número $\frac{7}{8}$:



1.3.2 Operaciones con fracciones

- **Suma**

Recordemos que la **suma** de varias fracciones con igual denominador es la fracción con el mismo denominador que aquellas y el numerador es la suma de los numeradores.

Ejemplos:

$$\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+1+5}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\frac{3}{11}-\frac{2}{11}+\frac{5}{11}+\frac{4}{11}-\frac{6}{11}=\frac{3-2+5+4-6}{11}=\frac{4}{11}$$

Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y después se suman de la forma indicada anteriormente

Ejemplos:

$$2+\frac{2}{5}-\frac{7}{15}=\frac{150}{75}+\frac{30}{75}-\frac{35}{75}=\frac{150+30-35}{75}=\frac{145}{75}=\frac{29}{15}$$

Generalizando:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+c.b}{b.d}$$

Es conveniente usar como denominador para las fracciones equivalentes, el mínimo común múltiplo. Observando el ejemplo anterior, vemos, que el denominador común para las fracciones equivalentes es 15, que es el mínimo común múltiplo entre 1; 5 y 15.

$$2+\frac{2}{5}-\frac{7}{15}=\frac{30+6-7}{15}=\frac{29}{15}$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{10}+\frac{5}{8}$$

Descomponiendo los denominadores en factores primos, obtenemos:

m.c.m. (6,10,8) = m.c.m. (2x3, 2x5,2^3) = 2^3x3x5 = 120

Por lo tanto:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{10}+\frac{5}{8}=\frac{20}{120}+\frac{36}{120}+\frac{75}{120}=\frac{20+36+75}{120}=\frac{131}{120}$$

Multiplicación

Recordemos que el **producto** de varias fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

Ejemplos:

$$\frac{6}{11}.\left(-\frac{3}{4}\right).\frac{7}{2}=\frac{6.(-3).7}{11.4.2}=-\frac{126}{88}$$

Generalizando:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$

División

Para dividir fracciones, es conveniente recordar:

Definición: Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **recíprocas o inversas** si su producto es igual a 1

Es decir $\frac{a}{b}x\frac{c}{d}=1$

De la definición se obtienen los siguientes resultados:

- Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene inversa si y sólo sí a ≠ 0
- La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$

Para dividir una fracción por otra, se multiplica la primera fracción por la inversa de la segundo:

Ejemplos:

$$\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{7} = \frac{55}{42}$$

$$\frac{3}{7} : 5 = \frac{3}{7} : \frac{5}{1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$$

Generalizando:

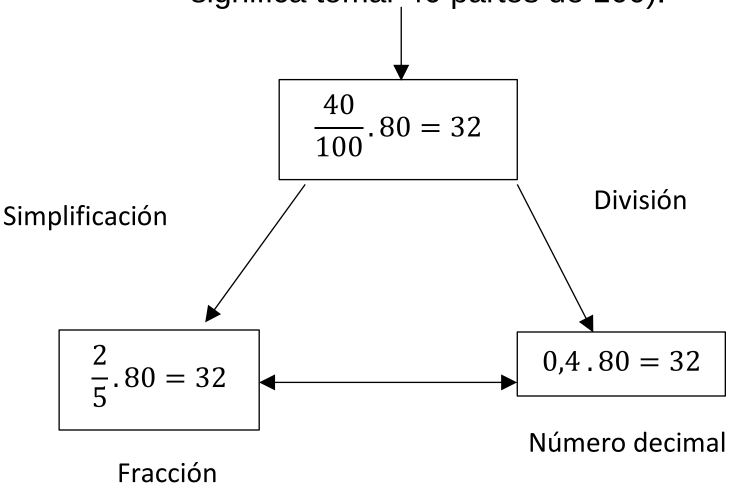
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} x \frac{d}{c}$$

1.3.3 Fracciones y Porcentajes

En la vida cotidiana es habitual utilizar en nuestro lenguaje los términos: porcentaje, por ciento pero como lo calculamos?

El siguiente diagrama muestra las diferentes maneras de expresar una parte de un todo.

Porcentaje: el 40% de 80 (Recordar que el 40% significa tomar 40 partes de 100).



<u>Ejemplos:</u> ¿Cuánto es el 15 por ciento (15%) de 38?

$$\frac{15}{100}.38 = 0{,}15.38 = 5{,}7$$

Otra forma:

$$\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{100}^{20}}.38 = \frac{3.38}{20} = 5{,}7$$

5,7 representa el 15% de 38

<u>Ejemplos:</u> ¿Qué parte del total representa el 25% de una cantidad C?

$$25\%\ de\ C = \frac{25}{100}.C = \frac{1}{4}C$$

Representa la cuarta parte de la cantidad C.

Variación porcentual: por medio de ejemplos realizaremos la comprensión de los aumentos y disminuciones porcentuales.

<u>Ejemplo 1:</u> Un frasco de yogurt cuesta inicialmente $18. Su precio sube 15% ¿cuál es el nuevo precio?

Nuevo Precio = $18 + \frac{15}{100}.18 = 18 + 0{,}15\ x\ 18 = (1 + 0{,}15)x18 = 1{,}15\ x\ 18 = \mathbf{20{,}70}$

Nuevo precio: $20,70

Ejemplo 2: Por pago al contado de un tanque de acero inoxidable de 20 litros uno de los proveedores hace un descuento del 10% ¿cuánto se paga al contado por este tanque que cuyo precio es $13900?

Precio al contado: $13900 - \frac{10}{100}x13900 = 13900 - 0{,}1x13900 = \$12510$

Pagaremos por el tanque: $12510 si realizamos la compra al contado

Generalizando:

Precio que se paga = precio actual ± porcentaje x precio actual

EJERCICIOS PROPUESTOS

<u>**Ejercicio 1**</u>: El precio de un termómetro era de \$120 y sufrió un incremento del 14% ¿Cuál es su nuevo precio?

<u>**Ejercicio 2**</u>**:** He pagado US\$ 85,40 por un electrodo de sodio el precio incluye el 21% de IVA ¿Cuál es el precio sin IVA? (IVA: Ingreso al Valor Agregado)

<u>**Ejercicio 3:**</u> Un filtro de bolsa costaba \$160 y se pagó por él \$128 en una liquidación ¿en qué porcentaje fue rebajado?

<u>**Ejercicio 4**:</u> Escribir las siguientes expresiones usando porcentaje:

a) Dos de cada cinco alumnos aprobaron matemática
b) La cuarta parte de los alumnos son de ingeniería
c) Todos los alumnos asisten a la clase de ILEA
d) Tres octavos de los alumnos están en el laboratorio
e) Uno de cada cuatro alumnos aprobó el ingreso de química
f) Las tres cuartas partes del curso cursa ingeniería en alimentos.

1.4 Números Reales

Los números racionales junto con los números irracionales, constituyen el conjunto de los números reales (R).

$$\begin{cases} \mathit{Números\ Reales}\ (R) \begin{cases} \mathit{Racionales}\ (Q) \begin{cases} \mathit{Enteros}\ (Z) \begin{cases} \mathit{Naturales}\ (N)(\mathit{Enteros\ positivos}) \\ \mathit{Cero} \\ \mathit{Enteros\ Negativos}\ (Z) \end{cases} \\ \mathit{Fraccionarios} \end{cases} \\ \mathit{Irracionales}\ (I) \end{cases} \end{cases}$$

Existe una correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta: a cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa, por ello decimos que los números reales cubre la recta.

A continuación, se mencionan las propiedades fundamentales de las operaciones de los números reales. Sean a, b y c números reales:

- La suma satisface las siguientes propiedades:
  a) Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + C$
  b) Conmutativa: $a + b = b + a$
  c) Existencia de elemento neutro: $0 \in R \,/\, a + 0 = 0 + a = a$
  d) Existencia del elemento opuesto: $\forall a \in R, \exists -a \in R \,/\, a + (-a) = (-a) + a = 0$

- El producto satisface las siguientes propiedades:
  a) Asociativa: $a.(b.c) = (a.b).c$
  b) Conmutativa: $a.b = b.a$
  c) Existencia del elemento neutro: $\exists\, 1 \in R \,/\, a.1=1.a=a$
  d) Existencia del elemento recíproco o inverso:
  $\forall a \in R,\ a =0,\ \exists\, a^{-1} \in R \,/\, a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$
  e) Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:
  $$a.(b+c) = (a.b) + (a.c)$$

- La diferencia o resta se define a partir de la definición de suma:
  $$a - b = a + (-b) \qquad \forall a,b \in R$$

- El cociente se define a partir de la definición de producto: $b \neq 0$
  $a \div b = a \,.\, b^{-1} \qquad \forall a,b \in R$

  OBSERVACIÓN: EL 0 NO TIENE INVERSO O RECÍPROCO

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: Dados los números reales:

5; -7; 3,2; $\frac{28}{7}$; $\frac{32}{14}$; $-\frac{20}{5}$; 2, $1\hat{3}$; -4, $3\hat{5}$; $\sqrt{2}$; 3,212112111211112…..; $\sqrt{9}$; $\sqrt{8}$; 23,454545……; 14,56666……

Clasificarlos en naturales, enteros, racionales, irracionales.

Ejercicio 2: Representar en la tabla numérica los siguientes números:

$$-\frac{2}{3}; 5; 0,7; \frac{1}{7}; \sqrt{2}; -\frac{1}{7}; -3,7$$

Ejercicio 3: Dados los siguientes pares de números, reemplazar por <, > o =, según corresponda:

a) $\frac{1}{2}$ □ 0 b) 5 □ $\sqrt{6}$ c) -3 □ $-\frac{5}{2}$ d) π □ 3,14159

e) $\sqrt{2}$ □ $\sqrt{3}$ f) $\sqrt{2}$ □ $1,41$ g) $\frac{1}{2}$ □ $0,52$ h) $\frac{1}{3}$ □ 0,333

i) $0,3333\ldots$ □ $\frac{1}{3}$ j) $0,67$ □ $\frac{2}{3}$ k) $0,25$ □ $\frac{1}{4}$ l) -1 □ -2

1.4.1 Operaciones aritméticas en el conjunto de los enteros

Además de las cuatro operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), debemos profundizar en otras que resultan necesarias dominar para la profundización de conceptos.

1.4.2- Potencias en los enteros

Potencia en matemática es una expresión que representa a un número que se multiplica por sí mismo varias veces. Consta de dos partes: ***la base*** que es el número a multiplicar y ***el exponente*** que es la cantidad de veces que ese número se multiplica por sí mismo.

Base a^b Exponente

Ejemplos:

$$\mathbf{3^2 = 9}$$

Significa que el número 3 se ha multiplicado por sí mismo dos veces, es decir 3*3 y su valor es 9.

$$\mathbf{2^3 = 8}$$

Significa que el número 2 se ha multiplicado tres veces o sea 2*2*2 y su valor es 8

Reglas de la Potencia:

1. Las potencias de exponente par son siempre positivas.
2. Las potencias de exponente impar tienen el mismo signo de la base

Propiedades de las potencias.

a) Un número elevado a cero, siempre tiene como resultado 1: $a^0 = 1$ ·

b) Un número elevado a 1, siempre es el mismo número: $a^1 = a$

c) Cuando dos potencias tienen la misma base y distinto exponente existen dos situaciones:

- Se multiplican las bases: en este caso se mantienen las bases y se multiplican los exponentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplos: $(-2)^5 * (-2)^2 = (-2)^{5+2} = (-2)^7 = -128$

- Se dividen las bases: en este caso se mantiene la base y se restan los exponentes: $a^m : a^n = a^{m-n}$

Ejemplos: $(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8$

d) Una potencia elevada a un número, es igual a otra potencia de la misma base y su exponente, es igual al producto del exponente de la potencia por el número al que se eleva: $(a^m)^n = a^{m*n}$

Ejemplos: $[(-2)^3]^2 = (-2)^{2*3} = (-2)^6 = 64$

e) Multiplicación de potencias de distinta base e igual exponente, se multiplican las bases y se mantienen los exponentes: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Ejemplos: $(-2)^3 \cdot (3)^3 = (-2.3)^3 = (-6)^3 = 216$.

f) División de potencias de distinta base e igual exponente, se dividen las bases y se mantienen los exponentes: $a^n : b^n = (a : b)^n$

Ejemplos: $(-6)^3 : 3^3 = (-6:3)^3 = (-2)^3 = -8$

1.4.3 - Raíz cuadrada de un número entero

En estricto rigor, raíz es una cantidad que se multiplica por sí misma una o más veces para presentarse como un número determinado.

Para encontrar esa cantidad que se multiplica se recurre a la operación de extraer la raíz a partir del número determinado y se ejecuta utilizando el símbolo √, que se llama radical. Por ello es que se habla de operaciones con radicales al referirse a operaciones para trabajar con raíces.

Encontrar o extraer la raíz es realizar la **operación contraria o inversa de la potenciación**, así como la suma es la operación inversa de la resta y viceversa, y la multiplicación es la operación contraria de la división y viceversa.

Para graficarlo de algún modo:

Potencia	Raíz
$X^n = a$ ⟷	$\sqrt[n]{a} = X$
X: Base de la potencia	X: Valor de la raíz
n: Exponente de la potencia	n: Índice de raíz
a: Valor de la potencia	a: Cantidad subradical (o radicando)

Ejemplos:

$8^2 = 64$ $\qquad$ $\sqrt[2]{64} = 8$

Cuando el índice de la raíz es 2 (raíz cuadrada), no se acostumbra por convención a colocarlo, se subentiende que es 2.

$$\sqrt[2]{64} = \sqrt{64} = 8$$

Para encontrar el valor de una raíz cuadrada se debe hacer la siguiente pregunta:
¿Qué número elevado a 2 (al cuadrado) da como resultado 64?
La respuesta es 8, porque $8^2 = 64$

Ejemplos: $\sqrt[2]{100} = 10$ ¿Qué número elevado a 2 da como resultado 100?
La respuesta es 10, porque $10^2 = 100$

TENER EN CUENTA: La **raíz cuadrada** (O DE CUALQUIER INDICE PAR, 4, 6, 8, etc) de un número negativo **NO EXISTE**

¿POR QUÉ?

$\sqrt[2]{-100} = ?$ ¿Qué número elevado a 2 da como resultado -100? La respuesta es que no existe un número que elevado al cuadrado me dé un número negativo.

$(-10)^2 = +100$

1.4.4.- Raíz cúbica

La raíz cúbica o raíz tercera de un número, es tal que si es multiplicada por sí misma, tres veces, da como resultado el mismo número. Es decir que para acceder a un resultado, se debe multiplicar tres veces un mismo número y que esté sea tal cantidad, la raíz cúbica es este número que ha sido multiplicado tres veces. Para que se entienda mejor, es necesario mostrar un pequeño ejemplo:

Ejemplo 1:

Tenemos el número 27.

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

Entonces: 3 es la raíz cúbica de 27.
La pregunta que surge es acerca de cómo se obtuvo ese número y si esto es comprobable

Pues solo hace falta multiplicar 3 por 3 por 3, es decir:

$$3^3 = 3.3.3 = \mathbf{27}$$

Ejemplo 2:

Tenemos el número **5** y este es el resultado de una raíz cúbica.

Lo que hace falta es encontrar ¿de qué número?,

Respuesta: se debe multiplicar 5 por sí mismo, tres veces

$$5^3=5.5.5=\mathbf{125}$$

Por lo tanto 5 es la raíz cúbica de 125, es decir: $\sqrt[3]{125} = 5$

En ocasiones puede suceder que sea muy complejo encontrar las raíces, para lo cual podemos usar la calculadora científica, la cual nos entrega las funciones que necesitamos

1.4.5.- Uso de la calculadora científica.

La calculadora, nos ofrece una extensa gama de posibilidades para realizar los distintos cálculos que necesitemos, con la ayuda de la imagen conoceremos algunas de ellas.
La calculadora tiene tres tipos de operaciones que se muestran de diferentes colores (blanco sobre las teclas, amarillo y rojo sobre las teclas) En el caso de que necesitemos calcular la raíz cuadrada, elevar un número al cuadrado o al cubo. Sólo debemos presionar la función e ingresar el número.

En el caso de que necesitemos elevar un número a otros exponentes debemos utilizar la tecla que tiene este símbolo ^ y se ingresa de la siguiente forma: base ^ exponente, es decir, por ejemplo 15 ^ 5 = ¿Cuál es el resultado?

Ahora bien, para calcular la raíz cubica, o una raíz distinta a la cuadrada, debemos fijarnos en la parte superior de la calculadora en la tecla **SHIFT (amarilla**), la cual realiza todas las funciones inversas a las que tiene las teclas blancas.

Ejemplo 1: en el caso de la raíz cúbica de un número, debemos presionar shift, luego √3 e ingresamos el número.

Ejemplo 2: Para el caso de una raíz cualquiera presionamos shift, luego el número del índice y luego el que queremos calcular.

Orden en las operaciones.

Para poder realizar las operaciones aritméticas, necesitamos un conjunto de normas comunes para realizar cálculos. Hace muchos años, los matemáticos desarrollaron un orden de operaciones estándar que nos indica qué operaciones hacer primero en una expresión con más de una operación. Sin un procedimiento estándar para hacer cálculos, dos personas podrían obtener diferentes resultados para el mismo problema.

Ejemplo 1:

3 + 5 • 2 tiene sólo una respuesta correcta ¿Es 13 o 16?

El orden en el que deben realizarse las operaciones aritméticas básicas (jerarquía de las operaciones, prioridad de las operaciones) es algo que todos debemos tener claro. Cuando una expresión aritmética involucra sumas, restas, multiplicaciones y/o divisiones el orden en el que debemos realizar las operaciones es:

1. Paréntesis
2. Multiplicaciones,
3. Divisiones
4. Sumas
5. Restas

Esto significa que primero debemos resolver las operaciones que aparezcan entre paréntesis, después las multiplicaciones y las divisiones (en el orden que queramos) y después las sumas y las restas (también en el orden que queramos). Si dentro de unos paréntesis aparecen otras operaciones se sigue la misma jerarquía.

Ejemplo 1:

3 + 5 • 2 tiene sólo una respuesta correcta ¿Es 13 o 16?
3 +(5.2)=3+10=13

Ejemplo 2:

- [3 + 4 + [4 + 7] + 4 - 9] =
−[3 + 4 + [11] + 4 − 9] = −[7 + 11 − 5] = −[18 − 5] = −[13] = − 13

Ejemplo 3:

[15 − (23 − 10: 2)] * [5 + (3 · 2 − 4)] − 3 + (8 − 2 · 3) =
[15 – (8 – 5)] * [5 + (6 – 4)] – 3 + (8 - 6) =
[15- (3)] * [5 + (2) - 3] + (2) =
[12] * [5 + 2 - 3] + 2 =
12 * [7 - 3] + 2=
12 * [4] + 2 =
12 * 4 + 2 =
48 + 2 =
50

2 - ECUACIONES

Se puede pensar que el álgebra comienza cuando se empiezan a utilizar letras para representar números, pero en realidad comienza cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números, y así el **gran paso de la aritmética al álgebra**.

La utilización de letras dentro del ambiente matemático es muy antigua, ya que los griegos y romanos las utilizaban para representar números bien determinados.

Las **ecuaciones** y sus soluciones son de mucha importancia en casi todos los campos de la tecnología y de la ciencia. Una fórmula es el enunciado algebraico de que dos expresiones que representan al mismo número.

Ejemplo:

La fórmula del área de un círculo es: $A = \pi r^2$.
El símbolo A representa el área, lo mismo que la expresión: πr^2, *pero aquí el área se expresa en términos de otra cantidad, el radio: r.*

A menudo es necesario resolver una fórmula para una letra o símbolo que aparecen en ella. En la práctica es necesario plantear ecuaciones para ser resueltas y no siempre es fácil identificar la información que nos lleva a la ecuación.

Los problemas de aplicación no vienen en forma “resuelva la ecuación”, sino que son relatos que suministran información suficiente para resolverlos y debemos ser capaces de traducir una descripción verbal al lenguaje matemático. Cualquier solución matemática debe ser verificada si es solución del problema en cuestión, porque podría tener solución matemática que carezca de sentido con el contexto del problema.

¿Qué es el álgebra?. Es el manejo de relaciones numéricas en los que una o más cantidades son desconocidas, **incógnitas,** a las que se las representa por letras, por lo cual el **lenguaje simbólico** da lugar al **lenguaje algebraico.** Las operaciones para números: suma, resta, producto, división, son conocidas como **operaciones algebraicas** y cualquier combinación de números y letras se conoce como **expresión algebraica**. Por lo tanto, al traducir un cierto problema al lenguaje algebraico, se obtienen expresiones algebraicas, que son una secuencia de operaciones entre números y letras. Las letras se las denomina, en general, **variables o incógnitas** y las simbolizamos con las últimas letras del alfabeto, en cambio las primeras letras se emplean para simbolizar números arbitrarios pero fijos, que llamamos **constantes**.

Frecuentemente aparecen igualdades que son de distinto tipo: identidades, ecuaciones y fórmulas.

Las **operaciones básicas con expresiones algebraicas,** se utilizan en el importante proceso de resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones y otras importantes aplicaciones de ellas.

Ejemplos:

Escribir en lenguaje algebraico las siguientes oraciones:

a) ***La base es el doble que la altura.***

Si llamamos b = *base* y h = *altura*,
La expresión algebraica es: $b = 2h$
También se podría haber llamado x = *base* e y = *altura*
Entonces se obtendría: $x = 2y$.

b) Dos números pares consecutivos.

$2n$ representa un número par, el siguiente número par es $2n + 2$, donde n es cualquier número entero

2.1 Ecuaciones y resolución de problemas

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparecen números y letras ligadas mediante operaciones algebraicas. Las letras, cuyos valores son desconocidos, se llaman **incógnitas.**

Resolver una ecuación consiste en transformar la igualdad en otra equivalente más sencilla, hasta obtener la solución, que es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad inicial.

Una expresión como $x + (x + 1) + (x + 2) = 33$ es una ecuación, sólo es cierta para $x = 10$. *Entonces la solución es $x = 10$.*

Hay ecuaciones con muchas soluciones, e incluso infinitas soluciones, por ejemplo, $x + y = 1$, $sen\ x = 0$ y otras que no tienen solución como: $x + 3 = x$.

Por lo tanto, resolver una ecuación es obtener las soluciones, si existen, que la satisfacen.

Para resolver una ecuación se utiliza las propiedades de la relación de igualdad y las propiedades de los números.

Ejemplos:

Resolver la siguiente ecuación y verificar el resultado.

a) $-2x - 3 = 5$

Solución:

a) $-2x - 3 + 3 = 5 + 3$	(sumamos a ambos miembros 3)
$-2x = 8$	(se realizan las operaciones posibles)
$(-2x) \div (-2) = 8 \div (-2)$	(Dividimos ambos miembros por -2)
$\boldsymbol{x = -4}$	(Solución de la ecuación)

Si reemplazamos en la ecuación original el valor -4 en cada x: −2(−4) − 3 = 8 − 3 = 5, vemos que el valor -4 la verifica.

Ejemplos:

Resolver la siguiente ecuación y verificar el resultado.

b) $5(x + 3) = 2x + 3$

Solución:

b) $5x + 5.3 = 2x + 3$	(Se distribuye el 5 en el primer término)
$5x + 15 - 2x = 2x-2x+3$	(se resta 2x a ambos miembros)
$3x +15 = 3$	(se realizan las operaciones posibles)
$3x + 15 -15 = 3 -15$	(se resta 15 a ambos miembros)
$3x = -12$	(se realizan las operaciones posibles)
$(3x) \div (3) = (-12) \div (3)$	(se divide por 3 a ambos miembros)
$\boldsymbol{x=-4}$	(Solución de la ecuación)

Si reemplazamos en la ecuación original el valor -4 en cada x: 5((−4)+3)=2(-4)+3 entonces: 5((-1)= - 8 +3 entonces sigue: -5 = -5, vemos que el valor -4 la verifica la ecuación.

Nota: Para asegurar que el valor encontrado es la solución buscada, es conveniente verificar en la ecuación original. A la solución también se le llama **raíz de la ecuación**.

2.2 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Se llama ecuación de primer grado con una incógnita a una expresión de la forma:

$$\boxed{a\,x + b = 0 \text{ con } a \neq 0,\ a, b \in R} \quad (1)$$

Se llama de **primer grado** porque la incógnita sólo aparece elevada a la potencia uno.

Ejemplos:

1.- Consideremos la ecuación $x - 2 = 5x - 3$**,** no es de la forma **(1)**, pero operando algebraicamente obtenemos:

$4x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ que es la **solución** de la ecuación.

Queda para el lector verificar que efectivamente es la solución de la ecuación dada.

2.- Sea $x = x - 3$, operamos y obtenemos $0x = -3$, no existe ningún número real x que satisfaga la igualdad. Por lo tanto, esta ecuación **no tiene solución.**

3.- Expresiones como: $x = x$ ó $3x - 2 = 2(x - 1) + x$, **tienen infinitas soluciones**, son ciertas para cualquier número real, son identidades.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $4x - 1 = 2 - 4x$

b) $22x - 7x - \frac{15}{2} = 10 - \left(\frac{7}{2}x - 1\right)$

c) $\frac{2x+1}{5} - \frac{x-1}{6} = \frac{x-3}{2}$

d) $\frac{x+1}{2} = \frac{15x+11}{6}$

e) $6x - 24 = 5(x - 4) + x - 4$

f) $25\,x - 18 = 20 - 5(x + 3) + 30x$

g) $[2(x - 3) - 2]2 - 4(x - 3) = 2x - 2$

h) $2(x - 3) + 4(x + 5) = 6$

i) $\frac{2}{x} = \frac{1}{4}$

j) $(x - 3)x = x^2$

Ejercicio 2: Indicar cuál de las siguientes ecuaciones es de primer grado y luego encontrar su solución:

a) $\frac{x+1}{2} = \frac{15x+11}{6}$

b) $\frac{2}{x+1} = 2x + 5$

c)$5 + x = \frac{2}{x+3}$

d) $(x^2 - 1)(x + 1) = 0$

Ejercicio 3:

a) La suma de tres números enteros consecutivos es 48.

¿cuánto vale cada número?

b)Encuentre tres números impares consecutivos cuya suma es igual a 117.

Ejercicio 4: De un tanque lleno de jugo concentrado se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcular la capacidad del tanque en centímetros cúbicos.

2.3 Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Se llama ecuación de segundo grado con una incógnita a una expresión de la forma:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0\ ,\ a,b,c\in R\ \ y\ \ a\neq 0} \qquad (2)$$

es **de grado dos** y la llamamos **ecuación cuadrática**.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita.

Ejemplos:

1 – La expresión $2x + 3 = 5(x – 3)$ es una ecuación de grado 1, con una incógnita y se llama de primer grado.

2 – La expresión $4 - x = 3x^2 + 5$ es una ecuación con una incógnita, de grado 2, o de segundo grado.

3 – La expresión $(x + 2)(x+3)$) 0 es una ecuación de segundo grado porque operando obtenemos: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

4 – La expresión $t(t+1)^2 = 3(t – 7)$ es una ecuación de grado 3, pues operando queda $t^3 + 2t^2 – 2t + 21 = 0$

Una ecuación de segundo grado tiene a lo más dos raíces. En los siguientes ejemplos podemos ver algunas de las situaciones que podemos encontrar.

Ejemplo 1:

a) $4x^2 = 400$, mediante operaciones algebraicas obtenemos: $x^2 = 10^2$ y aquí recordamos la propiedad de los números $\sqrt{x^2} = |x|$,con lo cual obtenemos: $x_1 = 10$ y $x_2 = -10$, que son las dos soluciones de la ecuación cuadrática.

b) $21\,x^2 = 400$, completamos mediante operaciones algebraicas para obtener las raíces: $x_1 = \sqrt{\frac{400}{21}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{400}{21}}$ y racionalizando resulta: $x_1 = \frac{20\sqrt{21}}{21}$ y $x_2 = -\frac{20\sqrt{21}}{21}$

Ejemplo 2:

t(*t*-10) = 0, observamos que el primer miembro es un producto de dos factores: t y t – 10. Si el producto de dos factores es cero, uno de los factores es cero. En nuestro caso: *t*(*t*-10) = 0, implica *t = 0 ó t*-10=0, de donde se obtiene, *t*=0 ó *t*=10. Por lo tanto, las raíces buscadas son: $\boldsymbol{t_1}$**= 0 y** $\boldsymbol{t_2}$**=10.**

Ejemplo 3:

$x^2 + 10x + 8 = 0,$ en este caso no es sencillo despejar la incógnita para encontrar las raíces, debemos aplicar la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado. Considerando la ecuación general de segundo grado (2), las soluciones se encuentran usando la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3)$$

Identificamos los coeficientes a, b y c de la siguiente manera: *a* el coeficiente del término cuadrático, *b* coeficiente del término lineal y *c* el término independiente. En este ejemplo: *a= 1, b=10 y c= 8*

Reemplazando los valores en la ecuación 3, se obtienen las raíces de la ecuación cuadrática del ejemplo**:** $\boldsymbol{x_1}$**=-0,88 y** $\boldsymbol{x_2}$**=9,12**

$ax^2 + bx + c = 0$	Sumamos a ambos miembros - c
$ax^2 + bx = -c$	Multiplicamos a ambos miembros por 4a
$4a^2x^2 + abx = -4ac$	Sumamos a ambos miembros b^2
$4a^2x^2 + abx + b^2 = b^2 - 4ac$	El 1[er] miembro es un trinomio cuadrado perfecto
$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$	Aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros
$\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac}$	Por definición de valor absoluto
$\lvert 2ax + b \rvert = \sqrt{b^2 - 4ac}$	Entonces
$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$	

En consecuencia, despejando x, tenemos la fórmula (3)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo en la fórmula antes de la raíz cuadrada, nos porporciona las dos soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

Ejemplo 1: Encontrar las dos raíces de la siguiente ecuación de segundo grado $x^2+x-6=0$ aplicando la fórmula (3), tenemos *a* = 1, *b*=1 y *c* = -6, reemplazando, obtenemos:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-6)}}{2.1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

Por lo tanto las soluciones son: x_1= 2 y x_2=-3

Ejemplo 2: Encontrar las dos raíces de la siguiente ecuación de segundo grado $9x^2+6x+1=0$ aplicando la fórmula (3), tenemos *a* = 9, *b*=6 y *c* =1, reemplazando, obtenemos:

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4.9.1)}}{2.9}=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{18}=\frac{-6\pm 0}{18}$$

Las soluciones son: x_1= x_2= $-\frac{1}{3}$

Ejemplo 3: Encontrar las dos raíces de la siguiente ecuación de segundo grado $x^2-2x+5=0$ aplicando la fórmula (3), tenemos *a*=1, *b*=-2 y *c*=5, reemplazando, obtenemos:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.5}}{2.1}=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$$

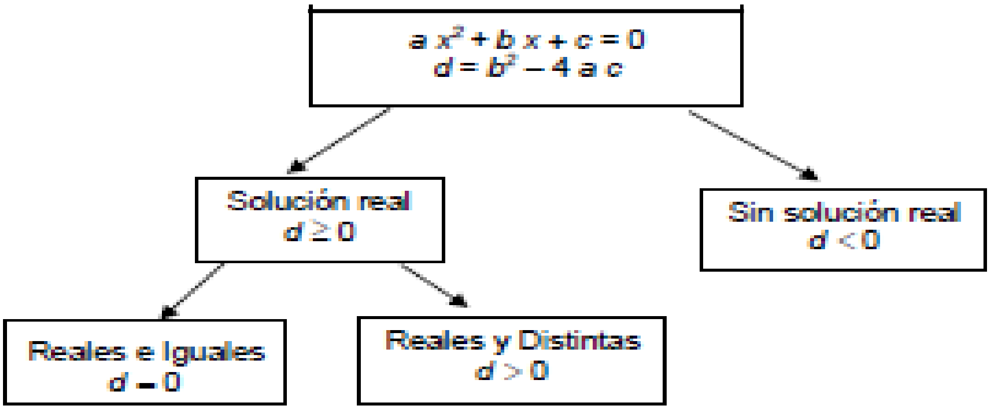
Recordemos que la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución real.

Analizamos cada una de las soluciones de los tres ejemplos. En el primero observamos que tiene dos raíces reales distintas, en el segundo, las raíces son reales e iguales y el último no tiene solución real.

Por esto deben os analizar **el radicando de la fórmula (3**), que es denominado **discriminante:**

Entonces sea $d=b^2-4ac$: $\begin{cases} Si\ d<0 & no\ existe\ solución\ real \\ Si\ d>0 & tiene\ raíces\ reales\ distintas \\ Si\ d=0 & las\ raíces\ son\ reales\ e\ iguales \end{cases}$

Resumiendo:



EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio1:

Dadaas las siguienes ecuaciones y sus soluciones, determinar a cuál de las ecuaciones corresponde cada solución y determinar el grado que tiene cada ecuación

Ecuaciones:

a) $9 = 5y - 3$ b) $\frac{2}{x+1} = 2x + 5$

c) $6y + 5 = 2y + 7$ d) $3x^2 - 6 = (x+2)(x-3)$

Soluciones:

a) -0,5 b) -3 c) 2,4 d) ½ e) 0 f) -1/2

Ejercicio 2: Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado, pero previamente identificar si son o no completas:

a) $2t^2 + 4t - 6 = 0$ **b)** $(t+7)(t-1) + (t+1)^2 = 0$ **c)** $x^2 - x - 2 = 0$

d) $(v+7)(v-3) = 0$ **e)** $t^2 + 4t = 0$ **f)** $t^2 - 1 = 0$

Ejercicio 3: Sin resolver las ecuaciones determinar el carácter de sus raíces (iguales, distintas, no reales)

a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ b) $2t^2 - 4t + 1 = 0$ c) $x^2 + 4x + 6 = 0$

Ejercicio 4: Utilizando el discriminante, decir qué tipo de soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x - 3 = 0$ c) $x^2 - 2x + 14 = 0$

d) $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$

Ejercicio 5:

a) Efectuar el producto de (x-4).(x-3)

b) Resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) ¿Existe alguna relación entre los coeficientes -7 y 12 con las soluciones $x_1=3$ y $x_2=4$?

Ejercicio 6:

Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0 \ con \ b, c \ \in R$ cuyas raíces X_1 y X_2, demostrar que: $X_1+X_2= - b$ y $X_1.X_2 = c$

Ejercicio 7:

El cuadrado de un número entero es igual al siguiente multiplicado por -4 ¿Cuál es el número?

Ejercicio 8:

¿Cuál es el número cuyo triple supera en dos a su cuadrado?

2. 4 Ecuaciones con dos incógnitas

Hemos visto ecuaciones del tipo $a\,x + b = 0$ (de primer grado con una incógnita) y ahora veremos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, del tipo:

$$a\,x + b\,y + c = 0 \text{ con } a\,,b\,,c \in R\,.$$

Tiene como solución un par de valores (x,y) que la satisfacen. A este tipo de ecuaciones también se las suele llamar **ecuaciones lineales**. La linealidad viene dada porque ambas incógnitas están elevadas a la potencia uno y no se multiplican entre sí.

Ejemplos:

1.- $x - 2y = 0$ es una ecuación lineal en dos variables: x e y , tiene infinitas soluciones, como ejemplo:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases};\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 5/2 \end{cases};\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases};\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases};\ etc$$

También se pueden escribir en forma de pares ordenados (x,y): (4,2); (5,5/2); (-2,-1); (-4,-2)

2- Al determinar las fuerzas F_1 y F_2 que actúan sobre una viga, podemos encontrar una ecuación tal como $2F_1 + 4F_2 = 200$ que tiene como soluciones:

$$\begin{cases} F_1 = 99 \\ F_2 = 1/2 \end{cases};\ \begin{cases} F_1 = 80 \\ F_2 = 10 \end{cases};\ etc$$

Ejemplo:
Un comercio vende calculadoras aritméticas a \$7.50 y científicas a \$18.00. Cierto día el comercio vendió 16 calculadoras por un importe total de \$193.50. ¿Cuántas calculadoras eran aritméticas?

Solución:

Primero identificamos que hay **dos tipos de calculadoras** en venta, si llamamos *x* a la cantidad de calculadoras aritméticas e *y* a la cantidad de calculadoras científicas, podemos traducir el problema al lenguaje algebraico de la siguiente manera:

$$x + y = 16$$

que es el total de calculadoras vendidas y por otro lado el monto total vendido:

$$7.50\, x + 18.00\, y = 193.50$$

Estas dos ecuaciones determinan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 7{,}50x + 18\,y = 193{,}50 \end{cases} \qquad (1)$$

Resolverlo, significa encontrar valores para las incógnitas x e y que satisfagan simultáneamente las dos ecuaciones.

Entonces, se despeja *x ó y* de la primera ecuación (es indistinto), por ejemplo:

$$x = 16 - y \quad (2)$$

A esta expresión la colocamos en la x de la segunda ecuación, de la siguiente manera:

$$7{,}50\,(16 - y) + 18\,y = 193{,}50$$

Operando algebraicamente:

$12010{,}50y = 193{,}50 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = 7}$, llevando este valor a (2) obtenemos $\boldsymbol{x = 9}$

Esta es la solución al sistema, para poder estar seguros debemos verificar los valores en ambas ecuaciones de (1), entonces:

$$\begin{cases} 9 + 7 = 16 \\ 7{,}50.9 + 18.7 = 193{,}50 \end{cases}$$

Por lo tanto, el par (*x*,*y*) = (9,7) es la solución matemática al sistema.

La respuesta al problema es: El negocio vendió 9 calculadoras aritméticas.

2 .5 Sistemas de ecuaciones y resolución de problemas

Los sistemas lineales aparecen frecuentemente en situaciones de la física, química, ciencias naturales, etc. como también en ciencias humanas y sociales, (economía, psicología, sociología).

Hay métodos convencionales de resolución de sistemas lineales: **Sustitución**, **Eliminación (o Reducción por suma o resta)** e **Igualación**. Estos métodos se basan en una secuencia de operaciones elementales. Además hay otros métodos: Gauss, Regla de Cramer (o Determinantes) .

Otra cuestión para resaltar es que a los sistemas sencillos de dos y tres variables por lo general es más fácil de resolverlos por los métodos convencionales, pero para un sistema de más de tres variables es conveniente utilizar otros métodos.

Repasaremos dos métodos de resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolverlos, es encontrar la solución, es decir, el valor de las incógnitas, para ello se siguen ciertas técnicas que dependen de la situación de cada sistema, pues cualquier método de resolución de sistemas es válido, ya que proveen la misma solución.

2.5.1 Método de Sustitución

Como su nombre lo indica, se despeja una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra, es la manera más natural de resolver un sistema.

Los **pasos a seguir** para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas son:

1.- Elegimos una de las ecuaciones para despejar una de las incógnitas en términos de la otra, en general, es la incógnita más fácil de despejar.

2.- Sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación y nos queda una ecuación en una incógnita y se resuelve.

3.- Luego, llevamos este resultado a la ecuación despejada en el paso **1** para obtener la otra incógnita.

4.- Verificar la solución obtenida en ambas ecuaciones.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$$

Paso 1: Después de observar ambas ecuaciones, podemos despejar *y* de la primera ecuación:

$$2x + 3y = 1 \rightarrow y = \frac{1-2x}{3} \qquad (1)$$

Paso 2: Reemplazamos ahora en la segunda ecuación:

$$2x - 6(\frac{1-2x}{3}) = 2$$

Nos queda una ecuación de primer grado en una incógnita, cuya solución es: $\boldsymbol{x = 2/3}$

Paso 3: El y correspondiente lo obtenemos sustituyendo este valor de *x* en (1):

$$2(\frac{2}{3}) + 3y = 1 \quad \rightarrow \ y = \frac{1-4/3}{3} = -\frac{1}{9}$$

Por lo tanto la probable solución es: $(x_0, y_0) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{9})$

Paso 4: Sustituimos (2/3, -1/9) en ambas ecuaciones, para verificar que es solución:

$$\begin{cases} 2(\frac{2}{3}) + 3(-\frac{1}{9}) = 1 \\ 2(\frac{2}{3}) - 6(-\frac{1}{9}) = 2 \end{cases} \text{ Operando se obtiene} \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \\ \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \end{cases}$$

Como se verifican ambas ecuaciones, la solución es: $\boldsymbol{(x_0, y_0) = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{9})}$

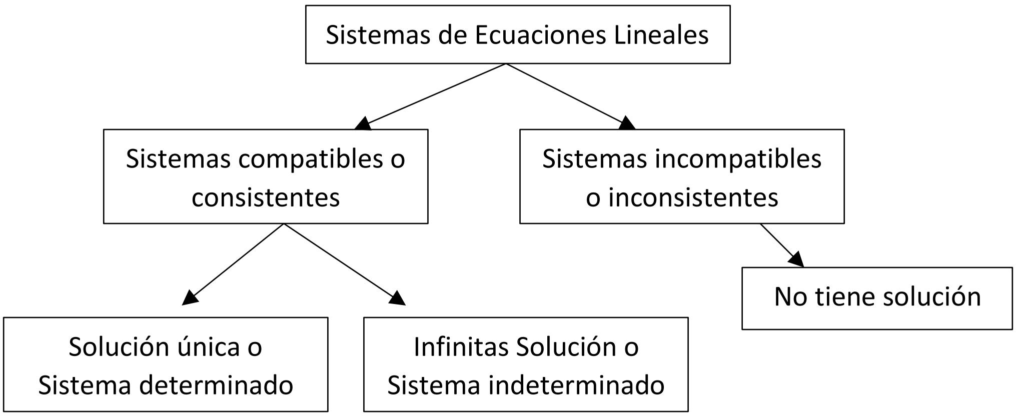
Resumiendo: Dados a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 ε R, hemos analizado sistemas de tipo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Resolver el sistema de ecuaciones (1) es encontrar el par ($(x_{0,}y_0)$ que será solución del sistema sí y sólo 9sí, verifica ambas ecuaciones simultáneamento, es deicr:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

El sistema (1) puede tener una o infinitas soluciones ó no tener solución alguna. Estos resultados podemos resumirlos en el siguiente cuadro:



EJERCICIOS PROPUESTOS

<u>**Ejercicio 1:**</u> Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 78 \\ 4x + y = 54 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 3y = 24 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y = 12 \\ 6x + 5y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x + 7y = 4 \\ -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x - 5y = -10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y - 4 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x - 6y + 12 = 0 \end{cases}$

<u>**Ejercicio 2:**</u> El predio donde se instalará una planta de molienda de nueces es rectangular. El perímetro del predio mide 17000 cm y el largo mide 100 dm más que el doble del ancho. Se quiere averiguar cuáles son las medidas en metros del predio.

<u>**Ejercicio 3:**</u> La suma de dos números es 81 y la diferencia del doble del primero y el triple del segundo es 62 ¿cuáles son esos números?

<u>**Ejercicio 4:**</u> Se necesitaron 30 km de cerca para cercar un predio de una planta que es rectangular. ¿Cuáles son las dimensiones del predio si se sabe que la diferencia entre la longitud y el ancho es de 5 km?

2.5.2 Método de Reducción por suma o resta o de Eliminación

Recordemos que dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjuntos solución.
El método de reducción consiste en transformar el sistema dado en uno equivalente. En esencia consiste primero en ver si alguna de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, si no es así se trata de acomodar para que así lo sea. Luego, restando o sumando miembro a miembro las ecuaciones, se obtiene una ecuación con una incógnita menos, esto quiere decir que se redujo el número de incógnitas, de allí el nombre de reducción o eliminación.

Los **pasos a seguir** son:

1.- Preparamos ambas ecuaciones, multiplicando (dividiendo) por una constante (número) adecuada para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente, salvo signo que puede ser positivo (o negativo), en ambas ecuaciones.

2.- Restamos (o sumamos), según signo del coeficiente, miembro a miembro ambas ecuaciones y con ello desaparece una incógnita, así reducimos el número de ecuaciones, en nuestro caso a una ecuación.

3.- Resolvemos la ecuación obtenida.

4.- Luego a este resultado lo llevamos a cualquiera de las dos ecuaciones iniciales para obtener la otra incógnita (o podemos emplear la misma técnica para despejar la otra incógnita).

5.- Verificar la solución obtenida, en ambas ecuaciones.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

Observando el sistema podemos ver que x tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, por lo tanto, restando miembro a miembro obtenemos:

$$-\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$
$$0x + y - (-5y) = 7 - 1$$

Entonces: $6y = 6$, de aquí se deduce que $\boldsymbol{y = 1}$**,** reemplazando y en la primera ecuación $3x + 1 = 7$, $3x = 6$, entonces $\boldsymbol{x = 2}$

Verificación: $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} = \begin{cases} 3.2 + 1 = 7 \\ 3.2 - 5.1 = 1 \end{cases}$

Por lo tanto, la solución única es: $(x_{0,}y_0) = (2{,}1)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: Resolver los siguientes sistemas por el método propuesto en este punto.

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x - 2y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - y = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 0 \\ 3x - 4y = -\frac{19}{2} \end{cases}$

Ejercicio 2: Dos amigos fueron de visita a una granja en la que había pavos y corderos. Al salir uno de ellos le preguntó al otro ¿Cuántos pavos y corderos había? Averígualo le dijo el otro, ví 72 ojos y 122 patas.

Ejercicio 3: Un galpón de empaque de fruta, tiene cámaras con un solo motor y otra con dos motores. Tiene un total de 50 cámaras y 87 motores ¿cuántas cámaras de cada tipo tiene?

Ejercicio 4: Una planta de tomates vende las latas al costo a $8 cada una, pero a los empleados de la misma se les hace un descuento de $2. En una tarde se vendieron 525 latas y recaudaron $358 ¿Cuántas latas vendió de cada tipo?

Ejercicio 5: El perímetro de un triángulo isósceles es de 18 cm. Cada uno de los lados iguales es 3 unidades mayor que la base ¿Cuáles son las medidas de los lados en metros?

2 . 6 ¿Cómo plantear y resolver Problemas?

Hasta ahora hemos visto problemas sencillos, de aquí en adelante veremos gran cantidad de problemas resueltos para que tengamos al menos una base y técnicas para resolverlos.

En los problemas se plantean la o las ecuaciones que relacionan los datos con las incógnitas. Lo difícil es identificar la información que lleva a la ecuación que se debe resolver, esto se debe a menudo, a que parte de la información se infiere, pero no está explícitamente establecida.

A continuación, se muestra la forma en que se utilizan las expresiones algebraicas para plantear y resolver ecuaciones lineales y /o cuadráticas en alguna de sus aplicaciones. Son ellas y sus soluciones de gran importancia en casi todos los campos de la tecnología e ingeniería y de la ciencia en general.

2.6.1 Pasos útiles para resolver problemas

1) **COMPRENDER EL PROBLEMA**
2) **CONCEBIR UN PLAN**
3) **EJECUTAR EL PLAN**
4) **EXAMINAR LA SOLUCIÓN OBTENIDA**

1.- COMPRENDER el problema:

• Leer el enunciado. Señalar cuáles son los datos, qué es lo que se conoce del problema.

• Elaborar, si es necesario, un mapa conceptual o un esquema de la situación.

• Encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.

• Introducir una notación adecuada.

• Si hay alguna figura relacionada con el problema, dibujar.

En síntesis, debemos plantearnos las siguientes preguntas:

¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición que relaciona los datos con las incógnitas? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente?

¿Es redundante? ¿Es contradictoria?

II.- CONCEBIR un plan:

“Se tiene un plan cuando se sabe, al menos a grosso *modo*, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones se han de efectuar para determinar la incógnita”.

Para concebir un plan se debe tener claro si los conocimientos son suficientes, ya que es imposible resolver un problema si se desconoce por completo el tema del cual trata.

Con frecuencia es adecuado abordar un problema planteando las siguientes preguntas:

¿Hemos resuelto un problema semejante? o ¿Hemos visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conocemos un problema relacionado con éste?.

Si no se puede resolver el problema propuesto se trata de resolver primero algún problema similar más sencillo que aporte información para el nuestro.

III.- EJECUTAR el plan:

Esta etapa también hay que plantearla de una manera flexible, alejada de todo mecanicismo.

Se debe tener presente que el pensamiento no es lineal, que necesariamente se van a producir saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica. Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos. ¿Se puede ver claramente qué cada paso es correcto?

Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto? Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.

Cuando tropezamos con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

IV.- EXAMINAR la solución obtenida:

Supone:

Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado. Se debe poner atención en la solución. ¿Parece lógicamente posible? ¿Es posible comprobar la solución? ¿Es posible encontrar alguna otra solución?

Siguiendo estos cuatro pasos se puede tener una buena idea y base para pensar acerca de cómo encarar distintas situaciones problemáticas y adquirir más habilidad para resolverlos no solo aquí, sino nos serán útiles cuando se nos presenten a lo largo de la carrera y por lo tanto estaremos mejor preparados.

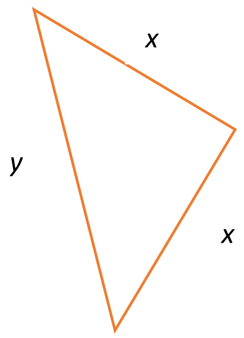
Ejemplo 1: Un lado de un triángulo isósceles mide 3 *cm* menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33 *cm*. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución:

I.- COMPRENDER el problema

a) Primero leemos el problema y determinamos que nos pide. Es decir, ubicamos cuál o cuáles son las incógnitas e introducimos la notación, por ejemplo ***x***. Acá representa la **longitud de uno de los dos lados iguales** del triángulo e ***y*** al **lado desigual.**

b) Consideramos los datos



Uno de los datos es que el lado desigual mide 3 cm menos que la suma de los lados iguales, Es decir: y-2x=3
Otro dato que el perímetro es de 33 cm, o sea: 2x+y=33

II.- CONCEBIR el plan:

De acuerdo al punto I, vemos que obtuvimos dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 2x + y = 33 \end{cases}$$

III.- EJECUTAR el plan:

Es resolver dicho sistema de ecuaciones por cualquier método.
Obtenemos $x = 9$ e $y = 15$, que es la solución matemática del sistema.

IV.- EXAMINAR la solución obtenida:

Verificamos que la solución matemática es la solución del problema: Según la notación que adoptamos los lados iguales miden 9 *cm* y el tercer lado 15 *cm*, luego el perímetro, que es la suma de las longitudes de los tres lados, es: 9 + 9 + 15 = 33, como ***se verifica el resultado***, entonces ***x* = 9*cm* e *y* = 15 *cm***, es la solución del problema. Finalmente,

Respuesta: Las longitudes de los lados del triángulo son: 9 *cm*, 9 *cm* y 15 *cm*.

Ejemplo 2: En una embotelladora de jugos han preparado 60 litros de jugo de ananá con el 10% de jugo puro de fruta, pero el laboratorista se da cuenta que hubo un error ya que la concentración de jugo puro debe ser del 20% ¿Cuánto jugo puro de ananá deben agregarle para que el refresco contenga el 20% de dicho jugo puro?

I- Comprender el problema

• *Lectura comprensiva del texto*

• *¿Cuál es la incógnita?.*

Cantidad de jugo de ananá que deben agregarle a los 60 litros de refresco para que resulte uno con el 20% de jugo puro de ananá.

• *¿Cuáles son los datos?*

60 litros de refresco de ananá con el 10% de jugo de fruta.

II- Concebir un plan.

Sea "x" la cantidad (medida en litros) **de jugo de ananá que debe agregarse**.

Hacemos una tabla que representa las relaciones entre los datos y la incógnita:

	Tengo	Agrego jugo puro	Obtengo
Cantidad en litros de refresco	60 [lts]	x [lts]	60+x [lts]
Concentración de jugo puro de ananá	10%	100%	20%
Cantidad de Jugo de puro de ananá en litros	10% de 60 [lts] = 6 [lts]	100% de x [lts] = x [lts]	20% de (60 + x) [lts] = 0,2 (60+x) [lts]

El aspecto clave para convertir la información de la tabla en una ecuación, es observar que la cantidad total de jugo puro de ananá en la nueva mezcla debe ser igual a la que contenía, más la que se agrega:

III- Ejecutar un plan.

Resolviendo la ecuación planteada obtenemos:

$$12 + 0{,}2x = 6 + x$$

$$12 - 6 = x - 0{,}2x$$

$$0{,}8x = 6$$

$$x = \frac{6}{0{,}8} = \mathbf{7{,}5\ litros}$$

Respuesta: Se debe agregar **7,5 litros de jugo puro de ananá** para que el refresco tenga una concentración del 20%

$$0{,}2(60 + x) = 6 + x$$

Ejemplo 3: Una máquina tiene una masa de 17 kg. Si está compuesta por dos partes y una de ellas pesa 3 kg más que la otra ¿cuáles son las masas respectivas?

Solución:
El problema no pide calcular la masa de cada una de las partes que integran la máquina.
Sea m_1, la masa de la parte más liviana, con lo que hemos establecido una de las incógnitas (podríamos haber representado con esta letra a la parte más pesada o podríamos haber elegido otra letra).
Además, como "una de ellas tiene una masa 3 kg más que la otra", podemos escribir:

$$m_2 - m_1 = 3$$

Como las dos masas juntas pesan 17 kg, tenemos:

$$m_2 + m_1 = 17$$

Entonces despejamos m_2 de la primera ecuación y la ponemos en la segunda:

$$m_2 = m_1 + 3$$
$$m_1 + 3 + m_1 = 17$$
$$2m_1 = 17 - 3$$
$$2m_1 = 14$$
$$\boldsymbol{m_1 = \frac{14}{2} = 7\ kg}$$

Reemplazando m_1 en la primera ecuación

$$\boldsymbol{m_2 = 7 + 3 = 10\ kg}$$

Respuesta: La máquina más liviana pesa 7 kg y la más pesada 10 kg.

Ejemplo 4: Una solución de alcohol y agua contiene 2 lts de alcohol y 6 lts de agua ¿cuánto alcohol puro se debe añadir a esta solución para que la solución resultante tenga $2/5$ de alcohol?

Solución:
Llamamos *x* al número de litros de alcohol que debemos añadir a la solución cuyo volumen es d 8 lt.
La cantidad final de alcohol que tendremos será: $2 + x$ y el volumen de la mezcla resultante será: $8 + x$. Por lo tanto, el volumen de alcohol final comparado con el volumen total correspondiente de la mezcla debe ser $2/5$. Esto significa que:

$$\frac{2+x}{8+x} = \frac{2}{5}$$

Entonces:

$$5(2+x) = 2(8+x)$$
$$10 + 5x = 16 + 2x$$
$$5x - 2x = 16 - 10$$
$$3x = 6$$

$$\boldsymbol{x = 2}$$

Respuesta: Se debe añadir 2 litros de alcohol a la solución.

3 POLINOMIOS

Para trabajar eficazmente en matemáticas debemos operar convenientemente con expresiones algebraicas, de modo que se transformen las expresiones en otras idénticas, pero más fáciles de manejar.

El objetivo de este capítulo es:

- Adquirir destrezas para conseguir identidades que resulten más convenientes.
- Recordar las identidades notables: cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia, diferencia de cuadrados.
- Recordar las operaciones con polinomios.
- Aprender que la regla de Ruffini no sólo sirve para dividir un polinomio por $x - a$, sino que también es útil para evaluar polinomios.
- Descomponer los polinomios en factores cuando sus raíces sean enteras.
- Aprender que una fracción algebraica es el cociente indicado de dos polinomios y que se comportan de forma similar a las fracciones numéricas.
- La ejercitación estará destinada a adquirir práctica en el manejo y comprensión de la factorización, de las operaciones con polinomios y de las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.

Repasemos algunos conceptos básicos:

Variables o indeterminadas: se llaman así las letras que se utilizan en los polinomios, usaremos fundamentalmente una x, si necesitamos más usaremos: y, z, t...

Constantes: son números o expresiones que representan números y acompañan a las variables, para ellas se usan las primeras letras del alfabeto: a, b, c...

Monomios: son expresiones algebraicas en la que las variables están multiplicadas entre sí y/o por constantes

Ejemplos: x^2y; $\frac{1}{3}x^3$; $-\sqrt{5}xyz^2$; $2at^2$; $-5x$

La constante de los monomios se llama ***coeficiente,*** en los ejemplos anteriores, son coeficientes: 1, 1/3, -$\sqrt{5}$, 2ª, -5, respectivamente. La o las variables, de un monomio se la llama ***parte literal*** del monomio. El ***grado*** de un monomio está dado por el número de factores literales y se obtiene sumando los exponentes a los que están elevadas las variables.

Ejemplos:

x^2y	es de grado 3 o tercer grado
$\frac{1}{3}x^3$	es de tercer grado
$-\sqrt{5}xyz^2$	es de cuarto grado
$2at^2$	es de segundo grado
$-5x$	es de primer grado

Las constantes son monomios de grado cero, sea k cualquier constante, entonces k=k.1=kx⁰

Dos monomios del mismo grado, con las mismas variables elevadas a las mismas potencias, son ***semejantes.***

Así los monomios $3x^2y^3$ y $-\frac{1}{2}x^2y^3$ son semejantes, también lo son $2x^5 \; y \; ax^5$. No son semejantes a estos últimos ninguno de los anteriores, a pesar que todos tienen igual grado.

Es inmediato sumar o restar monomios semejantes:

Ejemplos: $2x^3 + 4x^3 = (2+4)x^3 = 6x^3$

$$7x^4 - 3x^4 = (7-3)x^4 = 4x^4$$

La suma de monomios no semejantes: por ejemplo: $5x + 3x^2$ *nunca es otro monomio, en este caso particular la suma nos da un binomio.*

Un ***binomio*** es la suma de dos monomios no semejantes, un ***trinomio***, de tres y en general un ***polinomio*** es la suma algebraica de cualquier número de monomios no semejantes (en particular, un monomio también es polinomio)

3.1 Polinomios

Ejemplos: a) $3xy^2 - 2x^2y + y$

b) $x^5 + 3x^2 - 3x + 2$

En adelante, trabajaremos solamente con ***polinomio en una sola variable***, como el polinomio del ejemplo b). Este polinomio es suma de cuatro monomio no sememantes: x^5; $3x^2$; $3x$ y 2. Los coeficientes de estos monomios, llamados también coeficientes del polinomio son: 1, 3, -3 y 2. Los grados de estos monomios son 5, 2, 1 y 0, respectivamente.

El ***grado del polinomio*** es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. En este caso el polinomio es de grado quinto (5).

En forma general diremos que:

Un ***polinomio en una variable real*** es un expresión algebraica de la forma:

$$\boldsymbol{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots .. + a_1x^1 + a_0$$

Donde: $a_0, a_1, \ldots \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ son constantes, llamadas ***coeficientes del polinomio*** n≥0 es un número entero y *x* es la variable

Si $a_n \neq 0$ es este el ***coeficiente principal*** y *n* el ***grado del polinomio***.

A los monomios sumandos de un polinomio se los llama ***términos del polinomio***.

Ejemplos: $A(x) = 3x^2 + x - 1$; $B(x) = x^4 - 7x^3 + \frac{1}{2}x$; $C(x) = \pi x + \sqrt[3]{2}$

$D(x) = -28$; $E(x) = 0$

$A(x), C(x), D(x)$ y $E(x)$ son olinomios completos porque están todas las potencias decrecientes de x, $B(x)$ es un polinomio incompleto porque faltan los términos del segundo y de cero grado. $B(x)$ se puede completar agregando los términos que faltan con coeficientes iguales a cero:

$$B(x) = x^4 - 7x^3 + 0x^2 + \frac{1}{2}x + 0$$

El polinomio *A(x)* es de segundo grado, los coeficientes son: 3, 1 y -1; y el coeficiente principal es 3. En *B(x)*, los coeficientes son 1, -7, 0, ½, 0; el coeficiente principal es 1 y el polinomio es de cuarto grado. *C(x)* es un polinomio de primer grado, con coeficiente π, $\sqrt[3]{2}$ y el coeficiente principal es π. *D(x)* es un polinomio de grado cero, tiene un único coeficiente, que es también coeficiente principal y es -28 y por último *E(x)* es el ***polinomio cero***, que es el único polinomio al cual no se le asigna grado, ya que no tiene ningún coeficiente distinto de cero.
De lo anterior se deduce:

Todo polinomio de grado n tiene n + 1 coeficientes

3.2 Operaciones con polinomios

De aquí en adelante podremos observar la gran similitud que existe entre las operaciones con polinomios y las operaciones con números enteros.

3.2.1 Suma y resta

Para *sumar* dos o más polinomios se agrupan los monomios semejantes. A la *resta* de dos polinomios la transformamos en suma, sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplos: Sumar y restar los siguientes polinomios:

$P(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $\qquad Q(x) = x^4 - x^3 + 3x - 5$

La forma práctica de sumar o restar es ubicando los polinomios uno debajo del otro, de manera que los términos semejantes queden en columna:

Suma:

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \\ Q(x) = & x^4 - \quad x^3 \qquad\quad + 3x - 5 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 4x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{7}{2}x - 4 \end{array}$$

Resta:

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \\ -Q(x) = & x^4 - \quad x^3 \qquad\quad + 3x - 5 \\ \hline P(x) - Q(x) = & 2x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{5}{2}x + 6 \end{array}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: Sean $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 3$; $Q(x) = 3x^3 + 5x^2 - 11$ y $R(x) = 0$

Determinar: a) el grado de cada polinomio y sus respectivos coeficientes.

b)*S(x)=P(x)+Q(x)*

c)*T(x)=P(x)-Q(x)*

d)*U(x)=P(x)+R(x)*

e) el grado de *S(x), T(x) y U(x)*

Ejercicio 2: Calcular los valores de a, b, c y de para que se cumpla:

a) $(3x^2 - 4x^3 + 2x - 5) + (4 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4) = 5x^4 - 3x^2 + x - 9$

b) $(3x^2 - 6x^5 + 7x^3 - 7x) - (dx^5 - 7x^3 + cx^2 + bx + a) = 2x^2 - x + 3$

Ejercicio 3: Efectuar las operaciones inidcadas y reducir la expresión resultante:

a) $3(x^3 - 5x + 7) - 4(x^3 + 5x^2 + 10x - 1)$ $\qquad$ b) $8\left[\frac{3(x+2)}{4} + \frac{3x+5}{2} - 1\right]$

3.2.2 Multiplicación

El ***producto de dos monomios*** es otro monomio con coeficiente igual al producto de los coeficientes de los factores y el grado es suma de los grados de los factores

Ejemplos:

$$5x^3.(-2x^2) = -10x^5 \qquad \frac{3}{2}x.8x = 12\,x^2$$

En la multiplicación de un polinomio por un monomio, aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

Ejemplos:

$$(3x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 5x - 2).\frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^5 - 10\,x^4 + \frac{5}{2}x^3 - x^2$$

Ahora sí, estamos en condiciones de multiplicar polinomios y lo hacemos aplicando reiteradamente la propiedad distributiva, es decir, se multiplica cada término de uno por cada término del otro.

Una manera práctica de realizar la multiplicación de polinomios, efectuando los cálculos de manera ordenada y segura es la siguiente:

Ejemplos:

$$(2x^2 - x + 5)(x + 2) = 2\,x^2(x + 2) - x(x + 2) + 5(x + 2) =$$
$$2x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x + 5x + 10 = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 10$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
 & & & 2x^4 & -5x^3 & & -2x & +3 \\
\mathbf{x} & & & & & x^2 & -x & +2 \\
\hline
 & 2x^6 & -5x^5 & & -2x^3 & +3x^2 & & \\
 & & -2x^5 & -5x^4 & & +2x^2 & -3x & \\
 & & & 4x^4 & -10x^3 & & -4x & +6 \\
\hline
 & 2x^6 & -7x^5 & +9x^4 & -12x^3 & +5x^2 & -7x & +6
\end{array}$$

3.2.3 Identidades Notables

Estas identidades son importantes, las encontramos frecuentemente en los cálculos, por ello se acostumbra llamarlas notables.

- ***Cuadrado de un binomio***

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{2}=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)=a^{2}+ab+ba+b^{2}$$
$$=\boldsymbol{a}^{2}+\boldsymbol{2ab}+\boldsymbol{b}^{2}$$

- **Cubo de un binomio**

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{3}=(a+b)^{2}(a+b)=(a^{2}+2ab+b^{2})(a+b)$$
$$=a^{2}(a+b)+2ab(a+b)+b^{2}(a+b)$$
$$=a^{3}+a^{2}b+2a^{2}b+2ab^{2}+b^{2}a+b^{3}\boldsymbol{a}^{3}+\boldsymbol{3a}^{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{3ab}^{2}+\boldsymbol{b}^{3}$$

- **Suma por diferencia**

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=a(a-b)+b(a-b)=a^{2}-ab+ba+b^{2}=\boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{b}^{2}$$

Para recordar:

$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^{2}=\boldsymbol{a}^{2}\pm\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^{2}$$
$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^{3}=\boldsymbol{a}^{3}\pm\boldsymbol{3a}^{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{3ab}^{2}\pm\boldsymbol{b}^{3}$$
$$\boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{b}^{2}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

Las identidades notables son útiles en la factorización de polinomios, sirven para transformar una expresión algebraica en otras más sencillas.

Ejemplo 1:

$(x+3)^{2}-(x-1)^{2}=(x^{2}+6x+9)-(x^{2}-2x+1)=6x+9+2x-1=8x-8=$
$8(x-1)$

Ejemplo 2:

$x^{2}-12x+36=(x-6)^{2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: Calcular:

a) $(2ax^2+5)^3$ b) $9x^6-\frac{1}{4}$ c) $(x^2+x+1)(x-4)$

d) $(2x^3-x+1)(x^2+x-1)$ e) $(2x^3-3x^2+5x-2)(x^2-x-2)$

Ejercicio 2: Si el polinomio *A(x)* es de tercer grado y *B(x)* es de segundo grado ¿cuál es el grado de *A(x).B(x)*?

Ejercicio 3: Completar la siguiente multiplicación

$$\begin{array}{rrrr} & \_\_x^2 & +\_\_x & +\_\_ \\ & & x & -\_\_ \\ \hline & \_\_x^2 & -14x & -\_\_ \\ \_\_x^3 & +7x^2 & +\_\_x & \\ \hline \mathbf{2x^3} & \mathbf{+3x^2} & \mathbf{-8x} & \mathbf{-12} \end{array}$$

Ejercicio 4: Desarrollar las siguientes expresiones:

a) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$ b) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$ c) $(3x-2)(3x+2)$

d) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ e) $(x^2+25)(x^2-25)$ f) $\left(-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}\right)^2$

Ejercicio 5: Factorear (es decir, expresar como productos)

a) x^2-6x+9 b) $16x^2-49$ c) x^2-3

d) x^3-3x^2+3x-1 e) $\frac{4}{25}-x^2$ f) $\frac{1}{4}+x+x^2$

3.2.4 División de polinomios

El ***cociente*** de dos monomios, uno de grado m y otro de grado n, con m≥n, es otro ***monomio***, cuyo grado es la diferencia de los grados y el coeficiente se obtiene dividiendo los coeficientes de los monomios dados, es decir:

$$ax^m : bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n}$$

Ejemplo 1:

a)$3x^6 : 2x^2 = \frac{3}{2}x^4$ b)$(-8x^4) : 4x^3 = -2x$ c)$(-3x^5) : \left(-\frac{3}{2}x^5\right) = 2$

Recordemos como se procede en la ***división de dos polinomios***.

Ejemplo 1: Dividir

$$P(x) = 2x^3 - x + 5x^4 + 1 \text{ por } \quad Q(x) = x^2 - 2x - 3$$

Para ello debemos ubicar los polinomios de la siguiente manera

$5x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x + 1$ | $x^2 - 2x - 3$

$-5x^4 + 10x^3 + 15x^2$ | $5x^2 + 12x + 39$

COCIENTE

$12x^3 + 15x^2 - x$

$-12x^3 + 24x^2 + 36x$

$39x^2 + 35x + 1$

$-39x^2 + 78x + 117$

$113x + 118$

RESTO

Pasos realizados:

1) Ordenamos según las potencias decrecientes el dividendo y el divisor. Completamos el dividendo.
2) Para calcular el primer término del cociente, dividimos el término de mayor grado del dividendo por el término de mayor grado del divisor:

$$5x^4 \div x^2 = 5x^2$$

3) El producto de $5x^2$ por *Q(x)* (divisor), se coloca bajo el dividendo y se resta.
4) El primer resto parcial es $12x^3 + 15x^2$, bajamos el término: -x, a partir de aquí procedemos a repetir lo realizado en los pasos 2 y 3.

5) Detenemos el proceso cuando el grado del resto es menor que le grado del divisor. En nuestro caso tenemos:

$C(x) = 5x^2 + 12x + 39$ y $R(x) = 113x + 118$

En la división anterior, hemos dividido dos polinomios: el dividendo *P(x)* y el divisor *Q(x)*, obteniendo dos polinomios: el cociente *C(x)* y el resto *R(x).* Luego, aplicando la definición de cociente, tenemos:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & \underline{Q(x)} \\ R(x) & C(x) \end{array}$$

de donde se puede decir: P(x)=Q(x).C(x)+R(x)

O bien, dividiendo ambos miembros de la igualdad anterior por *Q(X)*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Una cuestión importante para recordar es que el resto *R(x),* es un polinomio de grado menor que el grado del divisor *Q(x),* o es cero. Según esto, el resultado de la división en general no es un polinomio. Veamos esta afirmación aplicada al ejemplo anterior:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^4 + 2x^3 - x + 1}{x^2 - 2x - 3} = 5x^2 + 12x + 39 + \frac{113x + 118}{x^2 - 2x - 3}$$

Observando la expresión, vemos que el grado del cociente es la diferencia de los grados del numerador y del denominador, el grado del resto es menor que el del denominador. El último término es una expresión racional que se suma al cociente, luego la expresión anterior no es un polinomio.

A la división entre polinomios, se la llama ***división entera***, cuando el resto es distinto de cero.

Cuando el resto es cero, la ***división es exacta.***

Ejemplo 1: División exacta

$$(6x^5 + 7x^3 - 12x^2 + 2x - 8):(3x^2 + 2)$$

El cociente es el polinomio $2x^3 + x - 4$ y el resto es cero, por lo tanto

$$\frac{6x^5 + 7x^3 - 12x^2 + 2x - 8}{3x^2 + 2} = 2x^3 + x - 4$$

Podemos afirmar que cuando la división es exacta el cociente es un polinomio.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: En una división de polinomios, el dividendo es de cuarto grado y el divisor de segundo grado.

a) ¿Cuál es el grado del cociente? b) ¿Qué puede decir del grado del resto?

Ejercicio 2: Calcular las siguientes divisiones

a) $\frac{5x+7}{5x}$ b) $\frac{x^2+x+5}{x^2+x+1}$ c) $\frac{5x^2-4}{x+1}$ d) $\frac{x^4+3x^2+2x+3}{x^2-4x+1}$ e) $\frac{2x^3-x+14}{x+2}$

Ejercicio 3: ¿Cuánto deben valer m y n para que la siguiente división:

$$(x^4 - x^3 + 5x^2 + mx + n) \div (x^2 + 3x - 1)$$

a) Sea exacta? b) Tenga resto $\frac{1}{2}x - 3$

3.2.4.1 División de un polinomio por *x* − *a*

Los polinomios, en similitud con los números enteros, se pueden descomponer en producto de factores, luego, cada uno de esos factores divide al polinomio exactamente.

El problema que se nos presenta es determinar esos factores, es decir:

Tenemos el polinomio P(x) ; ¿Existirá algún polinomio distinto de él mismo y de 1 tal que pueda dividirlo de modo que la división sea exacta?

Esta pregunta es difícil de responder en el caso general. Comenzaremos la búsqueda de esos divisores considerando polinomios especialmente simples, como son los de la forma *x* − *a*. Para efectuar divisiones de este tipo disponemos de un recurso práctico y cómodo conocido como la ***Regla de Ruffini***

3.2.4.2 Regla de Ruffini

Ejemplo 1: Dividir el polinomio $3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ por *x-2* usando la regla de Ruffini.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 3 & -2 & 0 & 5 & -1 \\
2 & & 6 & 8 & 16 & 42 \\
\hline
 & \underbrace{3 \quad 4 \quad 8 \quad 21} & & & & \boxed{41}\ \text{Resto}
\end{array}
$$

Coeficientes del cociente $C(x) = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 21$

Los pasos seguidos son los siguientes:

1. En la primera fila del cuadro anterior se colocan los coeficientes del polinomio completo y ordenado según las potencias decrecientes de *x.*
2. En la segunda fila, a la izquierda se escribe *a*, en este caso, 2.
3. En la tercer fila, se baja el coeficiente del término de mayor grado: 3 (éste será el coeficiente del 1° término del cociente)
4. Los otros números de la 2° y 3° fila se van obteniendo de la siguiente manera: multiplicamos, 2.3=6 que va debajo del coeficiente del 2° término y en la 2° fila y luego se suman, es decir, (-2)+2.3=4. Así obtenemos el 2° coeficiente del cociente, ubicado en la 3° fila.
5. Reiteramos el proceso $\begin{cases} 2.4 + 0 = 8 \\ 2.8 + 5 = 21 \\ 2.21 + (-1) = 41 \end{cases}$ hasta terminar.
6. Este último número 41, es el resto de la división (naturalmente nos tenía que dar un número porque el resto es siempre de menor grado que el divisor, por lo tanto, en nuestro caso el grado del resto debe ser 0.
7. Ahora podemos armar el resultado de la división, el grado de éste es una unidad menor que el grado del dividendo puesto que estamos dividiendo por un polinomio grado 1: por lo que el cociente es $C(x) = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 21$ y R(x) = 41.

Observación: La regla de Ruffini la podemos aplicar sólo cuando dividimos un polinomio *P(x)* por otro de la forma x-a, el cociente *C(x)* obtenido, es un polinomio de grado menor en una unidad al de *P(x)* y el resto r es una constante.

Al dividendo lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 1 = (x - 2)(\, 3x^3 + 4x^2 + 8x + 21) + 41$$

Dividiendo ambos miembros de la expresión anterior por (x-2), podemos expresar el cociente:

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 5x - 1}{x - 2} = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 21 + \frac{41}{x - 2}$$

Se observa que el cociente anterior no es un polinomio.

En una división exacta el último término no aparece porque el resto es cero, entonces, en este caso, el cociente nos da un polinomio.

Ejemplo 2: Dividir el polinomio $x^3 + 4x^2 + 16x + 39$ por *x+3* usando la regla de Ruffini.

	1	4	16	39	
-3		-3	-3	-39	
	1	1	13	$\boxed{0}$	r=0

Coeficientes del cociente $C(x) = x^2 + x + 13$

Criterio de divisibilidad de polinomios: Si un polinomio tiene coeficientes enteros, para que sea divisible por *x-a* ***es necesario*** que su término independiente sea ***múltiplo*** de *a.*

Por lo tanto, para determinar expresiones x-a que sean divisores de un polinomio con coeficientes enteros, se deben asignar valores al número a que dividan al término independiente.

Ejemplo 3: encontrar los divisores del polinomio $x^2 + x - 2$ el término independiente es -2, entonces sus divisores son: 1, -1, 2 y -2. Probamos con a=1 y dividimos por x-1 usando la regla de Ruffini.

	1	1	-2
1		1	2
	1	2	0 = r

Como el resto es cero, la división es exacta. Luego $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ ó

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = x + 2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: Usar la regla de Ruffini para determinar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^2 - 2x^2 + 7x) + (x - 2)$ b) $(6x^3 - x + x^4 - 10) \div (x + 3)$

c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \div (x + 1)$ d) $\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}x - 3\right) \div (x + \frac{2}{3})$

Ejercicio 2: ¿Cuánto debe valer *m* para que al dividir $x^3 - 2x^2 + mx - 15$ por *x-3* la división sea exacta?

3.3 Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio *P(x)* por *(x-a)* es igual al valor numérico del polinomio cuando *x=a*, es decir:

r=P(a)

El teorema nos dice:

- Si dividimos el polinomio *P(x)* por *(x-a)* obtenemos, además de un cociente, un resto, r.
- Si calculamos el valor numérico del polinomio *P(x)* cuando *x=a*, obtenemos un número al que llamamos *P(a)*. El teorema nos asegura que ***r es igual a P(a)***

Demostración:

Sabemos que $P(x) = (x - a)C(x) + r$

En la igualdad anterior sustituimos x por a, obtenemos:

$$P(a) = (a - a)C(a) + r = 0C(a) + r = r$$

Entonces: $\boldsymbol{P(a) = r}$***, que es lo que queríamos probard***

Ejemplo 1: ¿Cuál es el resto de la división de $P(x) = 2x^4 - 10x^2 - 7$ por $x - 3$?

$$r = P(-3) = 2.(-3)^4 - 10(-3)^2 - 7 = 2.81 - 10.9 - 7 = 162 - 90 - 7 = 65$$

Entonces el resto es 65.

Una aplicación del teorema del resto es la posibilidad de determinar, con cálculos senillos, cuando un polinomio es divisible por otro de la forma (x-a), es decir:

P(x) ***es divisible*** por x-a sí y solo sí r=0

Ejemplo 2: ¿El polinomio $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ es divisible por $x - 3$?

$$r = P(-3) = (-3)^4 - 10(-3)^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0$$

Por lo tanto son divisibles.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: Calcular el valor numérico del polinomio $5x^4 - 6x^2 + 2x + 3$ para:

a) x=1 b) x= 0 c) x= 2 d) x= -1 e) x=$\sqrt{2}$

Ejercicio 2: Calcular sin dividir, el resto de las divisiones que siguen:

a) $(2x^6 - 3x^2 + 4x - 9) \div (x + 2)$ b) $(x^3 - 8) \div (x - 2)$

c)$(x^3 + 8) \div (x - 2)$ d) $(x^7 + x^5 + x^3 + x + 1) \div (x + 1)$

Ejercicio 3: a) Calcular el cociente y el resto de la división

$(x^5 - 7x^3 - 3x^2 - 8x - 3) \div (x - 3)$

b)Según el resultado encontrado, ¿puedes escribir el polinomio dividendo como producto d dos factores?......Si tu respuesta es afirmativa escríbelo.

3.5 Raíces de un polinomio

Un número real a, es raíz del polinomio *P(x)* si a, es solución de la ecuación *P(x)=0 (1)*

Es decir que, si reemplazamos en el polinomio a la x por la <u>a</u>, ésta verifica la ecuación (1), entonces tenemos:

Si a es raíz de *P(x)* entonces el polinomio *P(x)* es divisible por *x-a*, por lo tanto, a *P(x)* podemos expresarlo como:

$$P(x) = (x - a)C(x)$$

Donde *C(x)* es el cociente de dividir a *P(x)* por *(x-a)*

Ejemplo 1: ¿Es 2 raíz del polinomio $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48$

Calculamos: $P(2) = 2.2^3 - 2 - 2^2 - 28.2 + 48$=0

Como *P(2)*=0, 2 es raíz de *P*(x), por lo tanto *P(x)* es divisible por x-2: entonces aplicando la regla de Ruffini determinamos el C(x):

	2	-2	-28	48
2		4	4	-48
	2	2	-24	0

$$C(x) = 2x^2 + 2x - 24$$

Luego

$$P(x) = (x-2)(\,2x^2 + 2x - 24) \qquad (1)$$

P(x) está expresado como producto de dos polinomios uno de 1° grado (x-2) y otro de 2° grado $2x^2 + 2x - 24$. Por lo tanto podemos analizar si es posible encontrad un factor (x-a) que divida al polinomio *C(x).*

El término independiente, 24, es múltiplo de 3, entonces ¿será 3 raíz de *C(x)?*

$$C(x) = 2.3^2 + 2.3 - 24 = 18 + 6 - 24 = 0$$

Por lo tanto se puede afirmar que 3 es raíz de *C(x)*, por lo tanto *C(x)* es divisible por *(x-3)* y aplicamos la regla de Ruffini para determinar el cociente *C_1(x).*

2	2	-24	
3		6	24
	2	8	0

Luego: $C_1(x) = 2x + 8$ por lo tanto $C(x) = (x-3)(2x+8)$

Reemplazando este último resultado en la expresión (1) de *P(x*), nos queda:

$$P(x) = (x-3)(2x+8)(x-2) = (x-3)2(x+4)(x-2)$$
$$P(x) = 2(x-3)(x+4)(x-2)$$

Es decir, que se ha logrado ***una factorización completa de P(x).***

Si el polinomio *P(x)* es de grado n, entonces tienen como *máximo n raíces*.

3.5.1 Factor común

En el polinomio $C(x) = 2x + 8$, el número 2 divide a cada término, entonces pudimos extraerlo como factor común, es decir lo pudimos expresar como:

$$C(x) = 2(x + 4)$$

Esta "extracción" que se hizo al finalizar la factorización de *P(x),* se podría haber realizado antes. Es más, es conveniente siempre *extraer todos los factores comunes* y luego continuar con la factorización.

Analicemos nuevamente el polinomio *P(x):*

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48$$

Si se observan los coeficientes se puede notar que todos son múltiplos de 2, por lo tanto 2, e factor común:

$$P(x) = 2(x^3 - x^2 - 14x + 24)$$

3.5.2 Factorización de Polinomios

En este punto, son dos los interrogantes importantes que debemos plantearnos antes del desarrollo:

¿Qué es factorear un polinomio?

¿Cómo lo hacemos?

- Factorear o factorizar un polinomio es expresarlo como producto de factores.

Volvamos al polinomio *P(x),* para poder responder a la segunda pregunta:

$$\boldsymbol{P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48 = 2(x-2)(x-3)(x+4)}$$

Si analizamos la expresión factorizada del polinomio:

- El número 2 es igual al coeficiente principal del polinomio o el coeficiente del término de mayor grado.
- Los términos independientes de cada uno de los factores de primer grado, cambiados de signo, 2, 3 y -4, son justamente las raíces de *P(x).*

Esta forma de factorear el polinomio P(x) es en realidad un caso particular del siguiente resultado general:

Si r_1, r_2, ...r_n son raíces del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \ldots + a_1 x + a_0$, es decir si se verifica:

$$P(r_1) = 0;\ P(r_2) = 0;\ \ldots.;\ P(r_n) = 0;$$

Entonces el polinomio se puede escribir de la forma:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ \ldots..(x - r_n)$$

Llamada descomposición factorial del polinomio.

Ejemplos: factorizar, utilizando las definiciones anteriores:

$A(x) = x^5 - 9x^3$ $\qquad$ $B(x) = x^2 - 8x + 16$ $\qquad$ $D(x) = x^4 - 1$

$E(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$ $\qquad$ $F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x$

1) Sacar factor común, siempre que sea posible:

Observamos que, los polinomios *A(x) y F(x)* tienen factor común, por lo tanto, los extraemos:

$$A(x) = x^5 - 9x^3 = x^3(x^2 - 9)$$
$$F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6)$$

2) Como no quedan totalmente factorizados los polinomios, utilizamos las igualdades notables y/o el método de las raíces:

$$A(x) = x^5 - 9x^3 = x^3(x^2 - 9) = x^3(x - 3)(x + 3)$$

Por lo tanto, *A(X)* queda totalmente factorizado.
Los polinomios *B(x) y D(x)* son igualdades notables: cuadrado de un binomio y diferencia de cuadrados, respectivamente. Aplicando estos recursos logramos sus factorizaciones:

$$B(x) = x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2.4x + 4^2 = (x - 4)^2$$
$$D(x) = x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$$

En los polinomios *E(x) y F(x),* no es posible usar ninguna igualdad notable. Para lograr su factorización, utilizaremos el método de las raíces:

Consideramos *F(x),* donde habíamos sacado factor común x, por lo tanto 0 es raíz del polinomio:

$$F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6) = xQ_1(x) \quad (1)$$

El término independiente de $Q_1(x)$ es 6, cuyos divisores son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6 ¿cuáles son raíces de $Q_1(x)$?

Probamos: $Q_1(1) = 1^4 + 1^3 - 51^2 + 1 - 6$= -8 ≠0 1 no es raíz

$Q_1(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) - 6$= -12 ≠0 -1 no es raíz

$Q_1(2) = (2)^4 + (2)^3 - 5(2)^2 + (2) - 6$= 0 2 es raíz

Por lo tanto dividimos a *Q₁(x)* por *x-2.*

	1	1	-5	1	-6
2		2	6	2	6
	1	3	1	3	0

$Q_2(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$

$Q_1(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + x + 3) = (x-2)Q_2(x)$ (2)

Repetimos el proceso con Q2(x), los divisores de 3 son: 1, -1, 3 y -3, probamos directamente con 3 y -3 (ya sabemos que 1 y -1 no son raíces).

$Q_2(3) = (3^3 + 33^2 + 3 + 3) = 60 \neq 0$ 3 no es raíz

$Q_2(-3) = ((-3)^3 + 3(-3)^2 + (-3) + 3) = 0$ -3 es raíz

Por lo tanto, dividimos *Q₂(x)* por *x+3*:

	1	3	1	3
-3		-3	0	-3
	1	0	1	0

$Q_3(x) = x^2 + 1$

Entonces: $Q_2(x) = (x+3)Q_3(x) = (x+3)(x^2+1)$

Reemplazando en 2, obtenemos:

$$Q_1(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + x + 3) = (x-2)Q_2(x) = (x-2)(x+3)(x^2+1)$$

Como $Q_3(x) = x^2 + 1$ no tiene raíces reales, por lo tanto, se para el proceso. Si reemplazamos *Q₁(x)* en 1 obtenemos:

$F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = xQ_1(x) = x(x-2)(x+3)(x^2+1)$

Que es la factorización completa del polinomio *F(x).*

Factorizamos ahora el polinomio $E(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$, el término independiente es 5, sus divisores son: 1, -1, 5 y -5.

Calculamos:

$E(1) = 21^3 - 91^2 - 6.1 + 5 = -8$ 1 no es raíz

$E(-1) = 2(-1)^3 - 9(-1)^2 - 6.(-1) + 5 = 0$ -1 es raíz

Dividimos *E(x)* por *x+1:*

	2	-9	-6	5
-1		-2	11	-5
	2	-11	5	0

Entonces: $E(x) = (x+1)(2x^2 - 11x + 5)$

Ahora factorizamos: $2x^2 - 11x + 5$. Tenemos dos opciones: repetimos el procedimiento anterior o, como es un polinomio de 2° grado podemos usar la fórmula para determinar sus raíces:

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{11 \pm 9}{4}$$

Por lo tanto, las raíces son:

$$x_1 = 5\,, \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $Q(x) = 2x^2 - 11x + 5 = (x-5)(x-\frac{1}{2})$

Luego:

$$E(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5 = 2(x+1)(x-5)(x-\frac{1}{2})$$

Quedando totalmente factorizado.

Resumiendo:

- Se debe determinar alguna de las raíces enteras de *P(x)* probando con los divisores del término independiente, por ejemplo *a*.
- Efectuamos la división de *P(x)* por *x-a* determinando otro polinomio *Q(x)* tal que:

  P(x)=(x-a) Q(x)
- Repetimos el proceso con *Q(x)* y así seguimos hasta que obtenemos un polinomio que no se pueda descomponer y así tenemos la factorización de *P(x).*

Nota: si un polinomio de grado *n* tiene al menos *n-2* raíces enteras, *es fácil* factorizarlo, de lo contrario es mucho más complicada su factorización.

Con todo lo visto hasta aquí también se pueden construir polinomios con características que nos convengan.

Ejemplos:

- Sólo con raíces enteras: $(x+2)(x-3)(x+5) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
- Sólo con raíces fraccionarias: $12\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 2$
- Con raíces enteras y fraccionarias: $5(x-1)(x+1)\left(x-\frac{3}{5}\right) = 5x^3 - 3x^2 - 5x + 3$
- Sin raíces reales: $(x^2+1)(x^2+2x+4) =$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: En las siguientes expresiones, extraer todos los factores comunes:

- $6a^3b - 8abc + 4a^2b^2c^2 - 2ab(3a^2 - 4c + 2ab^2c^2)$
- $2x^6 - \frac{2}{5}x^4 + 2x^3 - 2x^3\left(x^3 - \frac{1}{5}x + 1\right)$
- $4x^5 - 36x^4 - 4x^4(x - 9)$

Recuerda: aplicando la propiedad distributiva volvemos a la expresión que teníamos al principio.

Ejercicio 2: Sin Calcular, razona: ¿por qué? 2 y 3 no son raíces del polinomio $2x^4 - x^2 - x + 11$

Ejercicio 3:

a) razonar por qué $x - 1$; $x + 1$; $x + 2$; $x - 2$; $x\ 4$; $x - 4$ son posibles divisores de $x^3 - x^2 - 4x + 4$

b)¿Por qué x+3 puede serlo?

c)Factorear el polinomio dado.

Ejercicio 4: Factorear los siguientes polinomios

a)$x^3 + 6x^2 - x - 30$ b) $4x^5 - 44x^3 + 40x$ c)$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$

d) $x^3 + 8$ e) $3x^5 - 3$ f) $x^4 - 16$

Ejercicio 5: Escribir un polinomio:

a) Con raíces -2, 3 y -5
b) De cuarto grado con raíces -2, 3 y -5

3.6 Expresiones algebraicas fraccionarias

Una expresión algebraica fraccionaria o expresión algebraica racional es el cociente de dos polinomios, es decir:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \forall\ x \varepsilon R \text{ tal que } Q(X) \neq 0$$

Ejemplos:

a) $\frac{x}{x^3-3}$ b) $\frac{1}{x-1}$ c) $\frac{x^2-2x+5}{x^3+5x-10}$ d) $\frac{8x-7}{3}$

Las expresiones algebraicas racionales son en muchos aspectos, muy semejantes a los números fraccionarios (números racionales). Así por ejemplo en (a) x es el numerador y $x^3 - 3$ es el denominador de la expresión algebraica.

Cuando el numerador y el denominador de una expresión racional no tienen factores en común (excepto 1 y -1) decimos que es una *expresión irreducible*.

Ejemplos:

a) $\frac{x^2-1}{x^2-6x+5}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} = \frac{x+1}{x-5}$

b) $\frac{x^5-8x^2}{x^4+x^3-6x^2} = \frac{x^2(x^3-8)}{x^2(x^2+x-6)} = \frac{x^2(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2(x-2)(x+3)} = \frac{x^2+2x+4}{x+3}$

Dos fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes sí y sólo sí:

$$P(x).S(x) = R(x).Q(x)$$

Ejemplos:

a) $\frac{x^2-1}{x^2-6x+5} \quad es\ equivalnte\ a \quad \frac{x+1}{x-5}$

b) $\frac{x^5-8x^2}{x^4+x^3-6x^2} \quad es\ equivalnte\ a \quad \frac{x^2+2x+4}{x+3}$

Estas expresiones se obtienen simplificando las primeras.

Ejemplos:

a)$\frac{x-1}{x^3-x^2+x-1}$ $es\ equivalnte\ a$ $\frac{x^2-1}{x^4-1}$

porque ambas son iguales a: $\frac{1}{x^2+1}$

VERIFICAR!!!

Al multiplicar el numerado y el denominador de una expresión algebraica por un mismo polinomio, se obtiene una expresión equivalente a la dada, es decir:

$$\frac{x-7}{x+5} = \frac{(x-7)(x+1)}{(x+5)(x+1)} = \frac{x^2-6x-7}{x^2+6x+5}$$

Usando este resultado, dadas varias expresiones podemos encontrar otras, equivalentes a ellas, que tengan el mismo denominador, es decir, las reducimos a común denominador.

Ejemplos: Reduce a común denominador las expresiones

$\frac{4x+1}{x}$; $\frac{x+2}{x+1}$; $\frac{x-3}{x(x+1)}$

Procedemos como cuando se trabaja con fracciones, es decir, hallamos el *mínimo común múltiplo* de los denominadores factorizados:

$m.c.m[x; x+1; x(x+1)] = x(x+1)$

> ***Recuerda:*** *Mínimo común múltiplo* es el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Entonces, el denominador común de las expresiones es el *m.c.m.* luego, se divide el *m.c.m.* por el denominador de cada expresión, posteriormente se multiplica cada numerador por el resultado de tal división, obteniendo las expresiones algebraicas:

$\frac{(4x+1)(x+1)}{x(x+1)}$; $\frac{(x+2)x}{x(x+1)}$; $\frac{x-3}{x(x+1)}$

Esta última no cambió, porque el denominador común es justamente el denominador.

3.6.1 Suma y Resta

Para sumar expresiones algebraicas racionales, se reducen a común denominador y se suman los numeradores resultantes.

Ejemplos:

a) $\frac{x+1}{3x}+\frac{2x-3}{x^2-2x}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{(x+1)(x-2)}{3x(x-2)}+\frac{3(2x-3)}{3x(x-2)}-\frac{3x(x+2)}{3x(x-2)}=$
$\frac{(x^2-x-2)+(6x-9)+(3x^2+6x)}{3x^2-6x}=\frac{4x^2+11x-11}{3x^2-6x}$

b) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{x+(-1)}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

3.6.2 Producto o multiplicación

El ***producto*** de dos expresiones algebraicas racionales es igual a la expresión que resulta de multiplicar los numeradores dividida por la multiplicación de los denominadores.

Ejemplos:

a) $\frac{5x+2}{x}.\frac{5x-2}{x+1}=\frac{(5x+2)(5x-2)}{x(x+1)}=\frac{25x^2-4}{x^2+x}$

b) $\frac{x+3}{x-3}.\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{x+3}{(x-3)(x+3)^2}=\frac{1}{x^2-9}$

3.6.3. Cociente o división

El ***cociente*** de dos expresiones algebraicas racionales es igual a la expresión que resulta d multiplicar la primera por la inversa de la segunda.

Ejemplos:

a) $\frac{x^2-1}{x}\div\frac{x+1}{x}=\frac{x^2-1}{x}.\frac{x}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}.\frac{x}{x+1}=x-1$

b) $\frac{x+3}{x-3}\div\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{x+3}{x-3}.(x+3)^2=\frac{(x+3)^3}{x-3}$

c) $\frac{5x+2}{x}\div\frac{5x-2}{x+1}=\frac{5x+2}{x}.\frac{x+1}{5x-2}=\frac{5x^2+7x+2}{5x^2-2x}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1: Simplificar

a) $\frac{ax^2}{a^2x^5}$ b) $\frac{x^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$ c) $\frac{x^2+5x}{x(x+5)^2}$

d) $\frac{x+x^2}{x^2+x^3}$ e) $\frac{4-x^2}{x-2}$ f) $\frac{9x^2-4}{9x^2-12x+4}$

Ejercicio 2: Calcular

a) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+3}{x+2}$ b) $\frac{1}{x^2+10x+25}-\frac{1}{x+5}$

c) $\frac{4-x^2}{x^2-9}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+4}$ d) $\frac{x^2(x-1)}{x^2+5x+6}\div\frac{x^2-x}{x^2-9}$

4.Bibliografía

Ruth Martínez Valenzuela; María Amelia Mini; Nélida Haydée Pérez; Barbara Bajuk; Magdalena Pekolj; María Rosa BerraondoMatemática para ingresantes. 4° Edición 2008.

IPLACEX. Tecnológico Nacional. Nivelación en Matemática. www.iplacex.cl

Ingreso 2014. Nivelación en Matemática. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional del Sur.